Über orthogonale Entwicklungen.

Von S. SIDON (†) in Budapest.

Die hier zu behandelnden Fragen sind sehr verschiedenartig und beziehen sich teils auf allgemeine orthogonale, teils auf Fourierschen und Walshsche Entwicklungen. Die Einteilung der Sätze geschieht nach dem Charakter derselben in vier Gruppen: im §. 1 werden Absolut-Konvergenzfragen, im §. 2 einige Interpolationsfragen, im §. 3 Fragen aus dem Ideenkreis des Young—Hausdorffschen Satzes, im §. 4 eine Frage von STEINHAUS und anknüpfende Sätze behandelt. Die Sätze der §§. 1 und 3 haben natürlich einige Berührungspunkte. Die Besprechung der Resultaten führen wir in den einzelnen Paragraphen aus. Einige Sätze, welche vereinzelnt stehen, folgen im Anhang.

§. 1.

Eine Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

heißt bekanntlich „stark lakunär", wenn diejenige Indizes $\nu = n_k$, für welche $a_\nu^2 + b_\nu^2 > 0$, „sehr selten" liegen, d. h. es gibt ein $q > 1$ so, daß

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(†) Der durch seine Arbeiten über Orthogonalreihen wohlbekannte Mathematiker S. SIDON ist am 27. April 1941 nach einem leichten Unfall an Lungenentzündung gestorben. Seine hier zu Veröffentlichung kommende Arbeit wurde aus kurzen Manuskripten zusammengestellt, die im Zeitintervall 5. Juni 1937—13. Juni 1940 bei unserer Redaktion eingegangen sind. Die meisten derselben bedürften aus Lesbarkeitsrücksichten noch einer Umarbeitung. Die vorliegende Umarbeitung verdankt die Redaktion der Herren G. GRÜNWALD und P. TURÁN.

Eine solche Reihe können wir im Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu \cos n_\nu x + b_\nu \sin n_\nu x) \tag{3}$$

schreiben, da wir Summabilitätsfragen nicht berühren. Wenn $f(x)$ eine einseitig beschränkte und L-integrable Funktion bedeutet, deren Fourier-Reihe stark lakunär ist, so habe ich bewiesen[1]), daß die Koeffizientenreihe absolut konvergiert. Mit einer Umarbeitung der Beweisideen beweise ich hier zunächst den

Satz 1. *Es sei $f(x)$ wieder einseitig beschränkt und L-integrabel und wir setzen voraus, daß ihre Fourierreihe in k stark lakunäre trigonometrische Reihen zerfällt, d. h.*

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}(a_{ji}\cos n_{ji}x + b_{ji}\sin n_{ji}x), \tag{4}$$

wo die Zahlen n_{ji} alle verschieden sind und mit einem $q>1$

$$\frac{n_{j+1,1}}{n_{j1}} > q, \quad \frac{n_{j+1,2}}{n_{j2}} > q, \ldots, \frac{n_{j+1,k}}{n_{jk}} > q \tag{5}$$

gilt. Dann ist $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}(|a_{ji}|+|b_{ji}|)<\infty.$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen

$$f(x) \leqq M, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Es sei $x = x_0$ eine feste, aber beliebige Stelle und

$$\operatorname{sign}(a_{ji}\cos n_{ji}x_0 + b_{ji}\sin n_{ji}x_0) = \varepsilon_{ji}. \tag{7}$$

Die positive ganze Zahl l sei die kleinste, für welche

$$1+\frac{1}{q^l-1} < \sqrt{q}, \quad 1-\frac{1}{q^l-1} > \frac{1}{\sqrt{q}} \tag{8}$$

gilt und wir betrachten die Funktionen

$$f_{mi}(x) = \sum_{r=0}^{l-1}\prod_{j=0}^{m}\left(1+\frac{1}{k}\varepsilon_{lj+r,i}\cos n_{lj+r,i}x\right). \tag{9}$$

---

[1]) S. Sidon, Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen, *Math. Annalen*, **96** (1927), S. 418—419; Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, *Math. Annalen*, **97** (1927), S. 675—676. Für eine wichtige Anwendung siehe S. Banach, Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia Math.*, **2** (1930), S. 207—228.

Wir behaupten zunächst, daß

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{mi}(x)\,dx = l.$$

Das wird bewiesen sein, indem wir zeigen, daß keine der Zahlen von der Form

$$N = n_{i_1 l+r,\,i} \pm n_{i_2 l+r,\,i} \pm \ldots, \qquad i_1 > i_2 > \ldots$$
$$(l,\ r,\ i \text{ fest})$$

verschwindet. Nach (5) und (8) gilt nämlich

$$(11) \qquad \begin{aligned} N \geqq n_{i_1 l+r,\,i} - n_{i_2 l+r,\,i} - \ldots > n_{i_1 l+r,\,i}\left(1 - \frac{1}{q^l} - \frac{1}{q^{2l}} - \ldots\right) > \\ > n_{i_1 l+r,\,i}\left(1 - \frac{1}{q^l - 1}\right) > n_{i_1 l+r,\,i}\,\frac{1}{\sqrt{q}} > 0. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich sieht man ein, daß man, wenn wir ein beliebiges Produkt aus (9) ausmultiplizieren und jedes Glied nach der Identität

$$\cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \cos(x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n)$$

umformen, nie zwei Glieder sich zusammenziehen lassen. Wir behaupten aber, daß man auch dann nie zwei Glieder zusammenziehen kann, wenn wir in (9) nach r summieren. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich zwei ganzzahlige Wertsysteme $i_1 > i_2 > \ldots > i_s$ und $j_1 > j_2 > \ldots > j_t$ und zwei ganze Zahlen $0 \leqq r_1,\ r_2 \leqq l-1$ so, daß

$$(12) \qquad \begin{aligned} n_{i_1 l+r_1,\,i} \pm n_{i_2 l+r_1,\,i} \pm \ldots \pm n_{i_s l+r_1,\,i} = \\ = n_{j_1 l+r_2,\,i} \pm n_{j_2 l+r_2,\,i} \pm \ldots \pm n_{j_t l+r_2,\,i}. \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i_1 l + r_1 \geqq j_1 l + r_2$. Es sei erstens das Zeichen $>$ gültig. Dann ist die linke Seite nach (8) größer als

$$(13\text{a}) \qquad n_{i_1 l+r_1,\,i}\left(1 - \frac{1}{q^l} - \frac{1}{q^{2l}} - \ldots\right) > n_{i_1 l+r_1,\,i}\,\frac{1}{\sqrt{q}},$$

die rechte Seite aber nach (8) kleiner als

$$(13\text{b}) \qquad n_{j_1 l+r_2,\,i}\left(1 + \frac{1}{q^l} + \frac{1}{q^{2l}} + \ldots\right) < n_{j_1 l+r_2,\,i}\sqrt{q}$$

und nach (5)

$$(13\text{c}) \qquad n_{i_1 l+r_1,\,i}\,\frac{1}{\sqrt{q}} > n_{j_1 l+r_2,\,i}\sqrt{q}.$$

(13a), (13b) und (13c) sind also mit (12) nicht verträglich. Wenn zweitens $i_1 l + r_1 = j_1 l + r_2$, so verläuft der Beweis ähnlich. Also gilt für jedes $1 \leqq i \leqq k$

$$\text{(14)} \qquad \text{Koeff. } \cos n_{\nu i} x \text{ in } f_{m i}(x) = \frac{1}{k} \varepsilon_{\nu i}.$$

Es sei

$$\text{(15)} \qquad F_m(x) = \sum_{i=1}^{k} f_{m i}(x)$$

Nach (10) gilt offenbar

$$\text{(16a)} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(x)\, dx = k l$$

und

$$\text{(16b)} \qquad F_m(x) \geqq 0 \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Wir betrachten zuerst den Koeffizienten von $\cos n_{j 1} x$ in $F_m(x)$. Der Beitrag von $f_{m 1}(x)$ ist nach (14) $\frac{1}{k} \varepsilon_{j 1}$. Es ist aber möglich, daß z. B. auch in $f_{m 2}(x)$ das Glied $\cos n_{j 1} x$ auftritt. Nach den obigen hat die Gleichung

$$\text{(17a)} \qquad n_{j_1 l + r, 2} \pm n_{j_2 l + r, 2} \pm \ldots \pm n_{j_s l + r, 2} = n_{j, 1} \qquad (j_1 > j_2 > \ldots > j_s)$$

bei veränderlichen $j_1, j_2, \ldots, j_s$ und r höchstens eine Lösung; diese gibt also zu dem Koeffizienten von $\cos n_{j 1} x$ den Beitrag

$$\text{(17b)} \qquad \frac{1}{2^{s-1}} \frac{1}{k^s} \varepsilon_{j_1 l + r, 2}, \varepsilon_{j_2 l + r, 2} \ldots \varepsilon_{j_s l + r, 2}.$$

Da offenbar $s \geqq 2$ gilt, ist der Beitrag höchstens $\frac{1}{2k^2}$. Dasselbe gilt offenbar auch für die Beiträge von $f_{m 3}(x), \ldots, f_{m k}(x)$. Also „vorwiegt“ der Beitrag von $f_{m 1}(x)$ beim Koeffizienten von $\cos n_{j 1} x$ und zwar gibt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(x) \cos n_{j 1} x\, dx - \frac{1}{\pi k} \varepsilon_{j 1} = \vartheta_{j 1} \frac{1}{2\pi k}, \qquad |\vartheta_{j 1}| \leqq 1.$$

Analog gilt

$$\text{(18)} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(x) \cos n_{j i} x\, dx - \frac{1}{\pi k} \varepsilon_{j i} = \vartheta_{j i} \frac{1}{2\pi k}, \qquad |\vartheta_{j i}| \leqq 1$$

$$i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, lm + l - 1.$$

Die Fortsetzung des Beweises verläuft analog, wie ich l. c. [1]) angeführt habe; der Vollständigkeit halber skizzieren wir ihn. Es gilt

$$S = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{lm+l-1} |a_{ji} \cos n_{ji} x_0 + b_{ji} \sin n_{ji} x_0| \leqq$$

$$\leqq 2k\pi \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{lm+l-1} \frac{1+\frac{\vartheta_{ji}}{2}}{k\pi} |a_{ji} \cos n_{ji} x_0 + b_{ji} \sin n_{ji} x_0| =$$

$$= 2k\pi \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=}^{lm+l-1} \frac{1+\frac{\vartheta_{ji}}{2}}{k\pi} \varepsilon_{ji}(a_{ji} \cos n_{ji} x_0 + b_{ji} \sin n_{ji} x_0),$$

also nach (18), (6), (16b) und (16a)

$$(19) \quad \begin{aligned} S \leqq 2k \int_0^{2\pi} f(x) F_m(x-x_0)\,dx < 2kM \int_0^{2\pi} |F_m(x-x_0)|\,dx = \\ = 2kM \int_0^{2\pi} F_m(x)\,dx = 2k^2 l\pi M \end{aligned}$$

unabhängig von x_0 und m. Daraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{j,i} |a_{ji} \cos n_{ji} x_0 + b_{ji} \sin n_{ji} x_0|$$

überall konvergiert, also gilt dasselbe auch für die Reihe $\sum_{ji} (|a_{ji}| + |b_{ji}|)$ selbst, w. z. b. w.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich unmittelbar auf fastperiodische Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$ mit $\lambda_k > 0$ ausdehnen. Die Bedingung (5) kann dann bei sämtlichen Exponentenfolgen λ_{ki} oder einen Teil derselben durch die der linearen Unabhängigkeit der Glieder der nämlichen Exponentenfolgen ersetzt werden.

Es ist naheliegend zu fragen, ob der Satz sich nicht dahin verschärfen läßt, daß statt der Voraussetzung $\frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1$ auch $\sqrt[k]{n_k} > 1$ genügt. Dann gilt aber kein Satz über absoluter Konvergenz; auch dann nicht, wenn wir statt der einseitigen Beschränktheit überall Stetigkeit voraussetzen. Diese Tatsache folgt fast unmittelbar aus den bekannten Fejérschen Konstruktionsverfahren einer überall stetigen Funktion mit divergenter Fourierreihe[2]).

---

[2]) L. Fejér, Sur les singularités des séries de Fourier des functions continues, *Annales de l'École Normale Supérieure*, 28 (1911), S. 63–103.

Im Folgenden werden wir auch einige Sätze über die Rademacherschen und Walshschen Orthogonalsysteme entwickeln. Das Rademachersche System besteht bekanntlich aus den Funktionen

(20a) $\varphi_n(x) = \text{sign} \sin 2^{n+1} x \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \ n = 0, 1, 2, \ldots$

und das Walshsche System aus den Funktionen

(20b) $\psi_n(x) = \varphi_{n_1}(x)\, \varphi_{n_2}(x) \ldots \varphi_{n_\nu}(x) \qquad \psi_0(x) = 1, \ n = 1, 2, \ldots,$

wo $\varphi_{n_1}(x), \ldots$ die Bedeutung (20a) haben und die Entwicklung von n im dyadischen System

(20c) $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_\nu}, \qquad n_1 > n_2 > \ldots > n_\nu \geqq 0$

lautet. Wenn n die Darstellung (20c) besitzt, werden wir sagen, daß die Zahl n ν-ziffrig ist.

Das Rademachersche System wurde schon hinsichtlich lakunärer Eigenschaften untersucht[3]); nicht aber des Walshsche System. Für diesen gilt

S a t z II. *Wenn die Walsh-Entwicklung einer einseitig beschränkten und L-integrablen $f(x)$ stark lakunär ist, so ist die Reihe der Koeffizienten absolut konvergent.*

Der Beweis verläuft ganz analog, wie der des analogen Satzes beim trigonometrischen System[1]).

Bei einer anderen Verallgemeinerung des Satzes setzen wir von der gewöhnlichen Fourierreihe der einseitig beschränkten und L-integrablen $f(x)$ nicht mehr starke Lakunarität voraus, sondern nur, daß unendlich viele Indizes $n = n_k$ existieren, in deren „Nähe" alle übrigen Koeffizienten verschwinden. Dann ist die Reihe der „einsamen" Koeffizienten absolut konvergent. Die Voraussetzung dieses Satzes ist wohl nicht unnatürlich; die Untersuchungen von OSTROWSKI[4]) zeigen, wie wichtige Rolle eine ähnliche Lakunaritätsbedingung beim Überkonvergenz spielt. Genauer gesagt, beweisen wir den folgenden

S a t z III. *Es sei $f(x)$ einseitig beschränkt L-integrierbar und*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

---

[3]) KACZMARZ – STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa, 1935).

[4]) A. OSTROWSKI, Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1923, S. 185–192.

Es gäbe zwei Zahlen q und q' mit

(21) $$1 < q' < q'^2 < q$$

und eine Folge der n-Werten

$$n_1 < n_2 < \dots$$

mit

(22a) $$\frac{n_{k+1}}{n_k} > q \qquad k = 1, 2, \dots$$

und mit der Eigenschaft, daß $a_n = b_n = 0$ für alle n Werte, für welche

(22b) $$\frac{1}{q'} < \frac{n}{n_k} < q' \qquad n \neq n_k, \; k = 1, 2, \dots$$

gilt. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty.$$

Beweis. Es sei $x = x_0$ fest und $f(x)$ von oben beschränkt: $f(x) \leqq M$. Es sei wieder

$$\text{sign } (a_{n_\nu} \cos n_\nu x_0 + b_{n_\nu} \sin n_\nu x_0) = \varepsilon_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \dots$$

und k die kleinste positive ganze Zahl so, daß

(23) $$1 + \frac{1}{q^k - 1} < q', \quad 1 - \frac{1}{q^k - 1} > \frac{1}{q'},$$

und

(24) $$P_{mr}(y) = \prod_{i=1}^{m} (1 + \varepsilon_{ki+r} \cos n_{ki+r}\, y).$$

Ähnlich wie oben kann man einsehen, daß, wenn man $P_{mr}(y)$ als Cosinuspolynom aufschreibt, der Koeffizient von $\cos n_{ki+r}\, y$ gleich ε_{ki+r} ist und überhaupt nur solche Cosinusmultipla $\cos ny$ auftreten, für welche n in einem Intervall

$$\left[n_{ki+r} \left(1 - \frac{1}{q^k - 1}\right), \; n_{ki+r} \left(1 + \frac{1}{q^k - 1}\right) \right]$$

fällt. Nach (23) fallen also alle, in $P_{mr}(y)$ auftretenden Indizes a fortiori in die Intervalle

$$\left[n_{ki+r} \frac{1}{q'}, \; n_{ki+r}\, q' \right], \qquad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Daraus folgt aber nach der Voraussetzung über die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$, daß die Cosinusmultipla $\cos n_{k_{i+r}} y$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m)$ die einzigen Multipla sind, welche in der Fourierentwickelung von $f(x)$ und in $P_{mr}(x)$ auftreten. Dann ist aber, wie oben

$$\sum_{i=0}^{m} |a_{n_{k_{i+r}}} \cos n_{k_{i+r}} x_0 + b_{n_{k_{i+r}}} \sin n_{k_{i+r}} x_0| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) P_{mr}(x-x_0)\, dx,$$

woraus Satz III nach dem obigen Muster folgt.

Diesen Satz III kann man im Wesentlichen auf allgemeinere Orthogonalsysteme übertragen.

Satz IV. *Es sei*

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

ein normiertes Orthogonalsystem (z. B. bezüglich des Intervalles $[0, 2\pi]$) *und es gelte*

$$(0<)\, m \leqq |\varphi_n(x)| \leqq M, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

wo m und M von n unabhängig sind. (Solches System ist z. B. das Walsh-System.) *Dann existieren drei universelle Folgen von positiven Zahlen*

$$\begin{aligned} &n_1' < n_2' < \ldots < n_k' < \ldots \\ &n_1'' < n_2'' < \ldots < n_k'' < \ldots \\ &n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

mit

$$n_1' < n_1'' < n_1 < \ldots < n_{k-1} < n_k' < n_k'' < n_k < \ldots \tag{27a}$$

und

$$n_j'' - n_j' = N_j = \text{vorgeschrieben} \tag{27b}$$

so daß, sobald in der Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

einer einseitig beschränkten und L-integrablen $f(x)$ *alle* a_ν *mit*

$$n_j'' \leqq \nu \leqq n_{j+1}' \qquad \nu \neq n_j, \quad j=1, 2, \ldots$$

verschwinden, dann gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n_j}| < \infty$.

Vorbemerkung. In dem Spezialfalle $N_j = 1$ $(j=1, 2, \ldots)$ hatte ich Satz IV in meiner Note „Über Orthogonalsysteme" (*Compositio Math.*, (1940), S. 372—375) ausgesprochen. Eine Lücke im Beweise habe ich in einem Nachtrag erfüllt, die aber im *Compositio Math.* nicht mehr erscheinen konnte. Mit Satz IV ist also auch diese Lücke ergänzt (gleichzeitig wird dabei der Satz verschärft, da ich in der ursprünglichen Fassung auch die stückweise Stetigkeit der $\varphi_\nu(x)$ voraussetzen mußte).

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M \geqq 1$, $m > \frac{2}{3}$, ferner

(28) $$\varphi_n(x) \sim \sum_{l=0}^{\infty} (A_{nl} \cos lx + B_{nl} \sin lx).$$

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz A. *Aus der Folge* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ *kann man eine Teilfolge* $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x,)$ *auswählen und zwei Zahlenfolgen* $n'_1, n'_2, \ldots$; $n''_1, n''_2, \ldots$ *angeben mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $n'_1 < n''_1 < n_1 < \ldots < n_{k-1} < n'_k < n''_k < n_k < \ldots$; $n''_k - n'_k = N_k$

b) *zu jeder* $\varphi_{n_k}(x)$ *existiert ein trigonometrisches Polynom*

(29) $$F_k(x) = \sum_{l=i_k}^{I_k} (c_{kl} \cos lx + d_{kl} \sin lx),$$

für welche

$$|\varphi_{n_k}(x) - F_k(x)| < \frac{1}{2^k}$$

überall mit der Ausnahme einer Menge E_k *vom Maße* $\leqq \frac{1}{4^k}$ *gilt; in den Punkten von* E_k *gilt*

(30) $$|F_k(x)| \leqq 2M;$$

c) *es gilt* $I_1 > i_1$ *und für* $k \geqq 2$

$$I_k > i_k > 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} I_\nu;$$

d) *für jedes* $n > n'_{k+1}$ *gilt*

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2} I_k\right]} (|A_{ln}| + |B_{ln}|) < \frac{1}{3^k N_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

e) *für jedes* $n \leqq n''_k$ *gilt*

$$\sum_{l=\left[\frac{1}{2} i_k\right]}^{\infty} (A_{ln}^2 + B_{ln}^2) < \frac{1}{4^k} \min_{1 \leqq \mu \leqq k} \frac{1}{N_\mu^2}.$$

Bemerkung. Von diesen Zahlen n_k, n'_k, n''_k werden wir beweisen, daß sie die im Satz IV behaupteten Eigenschaften besitzen.

Beweis des Hilfssatzes. Es sei $n_1' = 0$, $n_1'' = N_1$. Da wegen der Normierung des Systems $\varphi_\nu(x)$ und (28)

$$\sum_{l=0}^{\infty} (A_{ln}^2 + B_{ln}^2) = 1 \tag{31}$$

gilt, so gibt es eine kleinste ganze Zahl i_1 so, daß für $n_1' \leqq n \leqq n_1''$

$$\sum_{l=\left[\frac{1}{2} i_1\right]}^{\infty} (A_{ln}^2 + B_{ln}^2) \leqq \frac{1}{4^1} \frac{1}{N_1^2}. \tag{32}$$

Da bekanntlich bei festem ν

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^{2\pi} \varphi_r(x) \cos \nu x \, dx = \lim_{r \to \infty} \int_0^{2\pi} \varphi_r(x) \sin \nu x \, dx = 0 \tag{33}$$

gilt, gibt es ein kleinstes Index n_1, für welches

$$n_1 > n_1'' \tag{34a}$$

und für jedes $n \geqq n_1$

$$\sum_{l=0}^{i_1 - 1} (|A_{ln}| + |B_{ln}|) \leqq \frac{1}{10}. \tag{34b}$$

Mit diesem n_1 bilden wir $\varphi_{n_1}(x)$; dann gibt es bekanntlich ein kleinstes I_1 so, daß

$$I_1 > i_1 \tag{35a}$$

und, wenn $\sigma_{I_1}(x)$ die I_1-te Cesàro-Mittel erster Ordnung der Fourierreihe von $\varphi_{n_1}(x)$ bedeutet,

$$\int_0^{2\pi} (\varphi_{n_1}(x) - \sigma_{I_1}(x))^2 \, dx < \frac{1}{100}. \tag{35b}$$

Dann ist aber

$$|\varphi_{n_1}(x) - \sigma_{I_1}(x)| \leqq \frac{4}{10} \tag{36}$$

mit Ausnahme einer Menge E_1 vom Maße $< \frac{1}{4}$. Da nach dem bekannten Fejérschen Satze $|\sigma_{I_1}(x)| \leqq M$ *überall* gilt, so hat man, wenn $\sigma_{I_1, i_1}(x)$ die $(i_1 - 1)$-te Partialsumme von $\sigma_{I_1}(x)$ bedeutet, für die Funktion

$$F_1(x) = \sigma_{I_1}(x) - \sigma_{I_1, i_1}(x)$$

auf E_1 wegen (34b) und $M \geqq 1$ offenbar

$$|F_1(x)| \leqq M + \frac{1}{10} < 2M \tag{37a}$$

und auf $\bar{E}_1$ wegen (36) und (34b)

(37b) $$|F_1(x)-\varphi_{n_1}(x)|\leqq|\varphi_{n_1}(x)-\sigma_{I_1}(x)|+|\sigma_{I_1,\,i_1}(x)|\leqq\frac{1}{2^1}.$$

Dann existiert aber nach (33) eine kleinste ganze Zahl n'_2 so, daß für jedes $n\geqq n'_1$

(38) $$\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2}I_1\right]}(|A_{l_n}|+|B_{l_n}|)<\frac{1}{3^1N_1}$$

gilt. So können wir voraussetzen daß

$$\begin{array}{llll}
n'_1, & n'_2 & ,\ldots, & n'_k,\ n'_{k+1} \\
n''_1, & n''_2 & ,\ldots, & n''_k \\
i_1, & i_2 & ,\ldots, & i_k \\
n_1, & n_2 & ,\ldots, & n_k \\
I_1, & I_2 & ,\ldots, & I_k \\
F_1(x), & F_2(x), & \ldots, & F_k(x) \\
E_1, & E_2 & ,\ldots, & E_k
\end{array}$$

bereits definiert sind; wir zeigen, daß das obige sukzessive Konstruktionsverfahren nicht abbricht. n''_{k+1} sei natürlich gleich $n'_{k+1}+N_{k+1}$. Dann sei i_{k+1} als die kleinste ganze Zahl definiert, für welche

(39a) $$i_{k+1}>2\sum_{\nu=1}^{k}I_\nu$$

und für welche bei jedem $n\leqq n''_{k+1}$

(39b) $$\sum_{l=\left[\frac{1}{2}i_{k+1}\right]}^{\infty}(A^2_{l_n}+B^2_{l_n})<\frac{1}{4^{k+1}}\min_{1\leqq j\leqq k+1}\frac{1}{N_j^2}$$

(das geht wegen (31)). Nach (33) gibt es ein kleinstes Index n_{k+1} so, daß

(40a) $$n_{k+1}>n''_{k+1}$$

und für jedes $n\geqq n_{k+1}$

(40b) $$\sum_{l=0}^{i_{k+1}-1}(|A_{l_n}|+|B_{l_n}|)\leqq\frac{1}{10^{k+1}}.$$

Mit diesem n_{k+1} bilden wir $\varphi_{n_{k+1}}(x)$; dann gibt es ein kleinstes ganzes I_{k+1} so, daß

(41a) $$I_{k+1}>i_{k+1}$$

und

(41b) $$\int_0^{2\pi} (\varphi_{n_{k+1}}(x) - \sigma_{I_{k+1}}(x))^2\, dx < \frac{1}{10^{2k+2}}.$$

Dann gilt

(42) $$|\varphi_{n_{k+1}}(x) - \sigma_{I_{k+1}}(x)| < \left(\frac{4}{10}\right)^{k+1}$$

mit Ausnahme einer Menge E_{k+1} vom Maße $< \frac{1}{4^{k+1}}$. Dann ist aber, wenn wir mit den obigen Bezeichnungen

$$F_{k+1}(x) = \sigma_{I_{k+1}}(x) - \sigma_{I_{k+1},\, i_{k+1}}(x)$$

wählen, wie oben, auf E_{k+1}

(43a) $$|F_{k+1}(x)| \leqq 2M$$

und auf $\overline{E}_{k+1}$

(43b) $$|F_{k+1}(x) - \varphi_{n_{k+1}}(x)| \leqq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Mit diesen I_{k+1} existiert nach (33) ein kleinstes ganzes n'_{k+2} so, daß

$$n'_{k+2} > n_{k+1}$$

und für jedes $n \geqq n'_{k+1}$

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2} I_{k+1}\right]} (|A_{l_n}| + |B_{l_n}|) < \frac{1}{3^{k+1} N_{k+1}}.$$

Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes IV. Es sei mit den obigen n_k

(44a) $$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{n_L} a_\nu \varphi_\nu(x),$$

(44b) $$f(x) \leqq K.$$

Über $f(x)$ wird also vorausgesetzt, daß mit den obigen n'_k und n''_k

(45) $a_\nu = 0$ für $n''_j \leqq \nu \leqq n'_{j+1}$, $\nu \neq n_j$, $j = 1, 2, \ldots, L$.

Es sei mit den obigen Polynomen $F_k(x)$

(46) $$P_d(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(1 + \operatorname{sign} a_{n_j} \frac{F_j(x)}{4M}\right), \qquad d = 1, 2, \ldots, L.$$

Nach (30) ist $P_d(x)$ nichtnegativ; ferner gilt nach c)

(47) $$\int_0^{2\pi} |P_d(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} P_d(x)\, dx = 2\pi \qquad (d = 1, 2, \ldots, L).$$

Da offenbar

(48) $$P_d(x)=P_{d-1}(x)+\frac{1}{4M}\operatorname{sign}a_{n_d}F_d(x)P_{d-1}(x) \qquad (d=2,\ldots,L)$$

gilt, so folgt

$$\int_0^{2\pi}P_d(x)F_d(x)dx=\int_0^{2\pi}P_{d-1}(x)F_d(x)dx+\frac{1}{4M}\operatorname{sign}a_{n_d}\int_0^{2\pi}P_{d-1}(x)F_d^2(x)dx;$$

da ferner nach b)

$$\int_{\bar{E}_d}P_{d-1}(x)dx=\int_0^{2\pi}P_{d-1}(x)dx-\int_{E_d'}P_{d-1}(x)\,dx>2\pi-\frac{1}{4^d}\left(\frac{3}{2}\right)^{d+1}>\frac{3\pi}{2},$$

so gilt nach c) und (47)

(49) $$\operatorname{sign}a_{n_d}\int_0^{2\pi}P_d(x)\,F_d(x)\,dx=\frac{1}{4M}\int_0^{2\pi}P_{d-1}(x)\,F_d^2\,(x)\,dx>$$

$$>\frac{1}{4M}\int_{\bar{E}_d}P_{d-1}(x)F_d^2(x)dx>\frac{\left(m-\frac{1}{2^d}\right)^2}{4M}\int_{\bar{E}_d}P_{d-1}(x)dx>\frac{1}{144M}\frac{3\pi}{2}.$$

Wenn $j<k$, so ist nach (48)

(50) $$\int_0^{2\pi}P_k(x)F_j(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}P_{k-1}(x)\,F_j(x)\,dx+\frac{1}{4M}\operatorname{sign}a_{n_k}\int_0^{2\pi}F_k(x)\,P_{k-1}(x)\,F_j(x)\,dx.$$

Da aber $P_{k-1}(x)$ ein trigonometrisches Polynom von der Ordnung $l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}$, $F_j(x)$ ein ebensolches von der Ordnung

$$l_j\leqq l_{k-1}\leqq l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}$$

bedeuten, ist die Ordnung von $P_{k-1}(x)\,F_j(x)$ kleiner als $2\sum_{\nu=1}^{k-1}l_\nu<i_k$ (siehe c)), also das zweite Glied rechts in (50) verschwindet nud es gilt

$$\int_0^{2\pi}P_k(x)\,F_j(x)\,dx=\int_0^{2\pi}P_{k-1}(x)\,F_j(x)\,dx, \qquad j<k,$$

daher

(51) $$\int_0^{2\pi}P_k(x)\,F_j(x)\,dx=\int_0^{2\pi}P_j(x)\,F_j(x)\,dx, \qquad j<k$$

und endlich nach (49) mit $d=j$

$$\text{(52)} \qquad \operatorname{sign} a_{n_j} \int_0^{2\pi} P_k(x) F_j(x)\, dx > \frac{1}{144M} \frac{3\pi}{2}.$$

Wir benötigen aber eine Abschätzung der Integrale $\int_0^{2\pi} P_k(x) \varphi_{n_j}(x)\, dx$. Es gilt wegen (29), (30), (47)

$$\left| \int_0^{2\pi} P_j(x) \varphi_{n_j}(x)\, dx - \int_0^{2\pi} P_j(x) F_j(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} P_j(x) (\varphi_{n_j}(x) - F_j(x))\, dx \right| < \frac{1}{2^j} 2\pi + 2M \int_{E_j} |P_j(x)|\, dx <$$

$$< \frac{2\pi}{2^j} + 2M \frac{1}{4^j} \left(\frac{3}{2}\right)^j < \frac{10M}{2^j},$$

also nach (49)

$$\text{(53)} \qquad \operatorname{sign} a_{n_j} \int_0^{2\pi} P_j(x) \varphi_{n_j}(x)\, dx > \frac{1}{44M} \frac{3\pi}{2} - \frac{10M}{2^j}.$$

Ferner gilt für $1 \leqq j < d \leqq L$ nach (48)

$$\text{(54)} \qquad \int_0^{2\pi} (P_d(x) - P_{d-1}(x))\, \varphi_{n_j}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4M} \operatorname{sign} a_{n_d} \int_0^{2\pi} P_{d-1}(x) F_d(x) \varphi_{n_j}(x)\, dx.$$

Nach (28), (54) gilt wegen

$$F_d(x) P_{d-1}(x) = c_0 \cos (i_d - (l_1 + l_2 + \dots + l_{d-1}))\, x + \dots$$

und wegen c)

$$\left| \int_0^{2\pi} (P_d(x) - P_{d-1}(x))\, \varphi_{n_j}(x)\, dx \right| =$$

$$\text{(55)} \quad = \frac{1}{4M} \int_0^{2\pi} P_{d-1}(x) F_d(x) \left[\sum_{l=\left[\frac{1}{2} i_d\right]}^{\infty} (A_{l n_j} \cos lx + B_{l n_j} \sin lx) \right] dx <$$

$$< \frac{1}{4M} \sqrt{\sum_{l=\left[\frac{1}{2} i_d\right]}^{\infty} (A_{l n_j}^2 + B_{l n_j}^2)} \sqrt{\int_0^{2\pi} P_{d-1}^2(x) F_d^2(x)\, dx}.$$

Der erste Faktor rechts in (55) ist nach $j < d$ und e) kleiner als

$$\text{(56a)} \qquad \frac{1}{2^d} \min_{1 \leqq \mu \leqq d} \frac{1}{N_\mu},$$

der zweite wegen (47) kleiner als

$$(56b)\quad 2M\left(\int_0^{2\pi} P_{d-1}^2(x)\,dx\right)^{1/2} <$$

$$< 2M \max_{0\leqq x\leqq 2\pi} |P_{d-1}(x)|\sqrt{2\pi} < 20M\left(\frac{3}{2}\right)^d,$$

also folgt aus (55), (56a), (56b)

$$(57)\quad \left|\int_0^{2\pi} P_d(x)-P_{d-1}(x))\,\varphi_{n_j}(x)\,dx\right| < 5\left(\frac{3}{2}\right)^d \min_{1\leqq\mu\leqq d}\frac{1}{N_\mu}.$$

Wenn wir (57) mit $d=k, k-1, \ldots, j+1$ anwenden und summieren, gewinnen wir

$$\left|\int_0^{2\pi} P_k(x)\,\varphi_{n_j}(x)\,dx - \int_0^{2\pi} P_j(x)\,\varphi_{n_j}(x)\,dx\right| < 20\left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} \min_{1\leqq\mu\leqq j+1}\frac{1}{N_\mu},$$

also nach (53) für $j<k$

$$(58)\quad \operatorname{sign} a_{n_j}\int_0^{2\pi} P_k(x)\,\varphi_{n_j}(x)\,dx >$$

$$> \frac{1}{144M}\,\frac{3\pi}{2} - \frac{10M}{2^j} - 20\left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} \min_{1\leqq\mu\leqq j+1}\frac{1}{N_\mu}.$$

Wir benötigen noch eine Abschätzung der Integrale $\int_0^{2\pi} P_j(x)\,\varphi_n(x)\,dx$, wenn $n>n'_{j+1}$. Da die Ordnung von $P_j(x)$ nach c) $(l_1+l_2+\ldots+l_{j-1})+l_j<\frac{l_j}{2}+l_j<\frac{3}{2}l_j$ ist, gilt wegen (47) und d)

$$\int_0^{2\pi} P_j(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} P_j(x)\left[\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2}l_j\right]}(A_{l n}\cos lx + B_{l n}\sin lx)\right]dx <$$

$$(59)\quad < \sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2}l_j\right]}(|A_{l n}|+|B_{l n}|)\int_0^{2\pi}|P_j(x)|\,dx =$$

$$= 2\pi\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2}l_j\right]}(|A_{l n}|+|B_{l n}|) < \frac{2\pi}{3^j N_j}.$$

Wenn ferner $j \leqq d \leqq k$ und $n'_j \leqq n \leqq n''_j$, dann ist wegen (48), wie in (55)

$$\left|\int_0^{2\pi} (P_d(x) - P_{d-1}(x))\,\varphi_n(x)\,dx\right| = \frac{1}{4M}\left|\int_0^{2\pi} P_{d-1}(x)\,F_d(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right| <$$

$$< \frac{1}{4M}\sqrt{\sum_{l=\left[\frac{1}{2}i_d\right]}^{\infty} (A_{ln}^2 + B_{ln}^2)}\sqrt{\int_0^{2\pi} P_{d-1}^2(x)\,F_d^2(x)\,dx} <$$

$$< \frac{1}{2^d} \min_{1\leqq\mu\leqq d} \frac{1}{N_\mu} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{d}{2}},$$

also erhalten wir durch Summation für $d = j, j+1, \ldots, k$

$$\left|\int_0^{2\pi} P_k(x)\,\varphi_n(x)\,dx - \int_0^{2\pi} P_{j-1}(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right| < 50 \min_{1\leqq\mu\leqq j} \frac{1}{N_\mu}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{j}{2}}.$$

Nach (59) gilt also für $n'_j \leqq n \leqq n''_j$ $(j \leqq k)$

$$(60)\qquad \left|\int_0^{2\pi} P_k(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right| < \frac{2\pi}{3^{j-1} N_{j-1}} + 50\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{j}{2}} \min_{1\leqq\mu\leqq j} \frac{1}{N_\mu} <$$

$$< 100\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{j}{2}} \min_{1\leqq\mu\leqq j} \frac{1}{N_\mu}.$$

Es sei endlich

$$(61)\qquad I = \int_0^{2\pi} f(x)\,P_L(x)\,dx.$$

Es ist wegen (47) und (44b)

$$(62\text{a})\qquad I < 2\pi K.$$

Ferner folgt nach (44a) und (45)

$$I = \sum_{n=1}^{n_L} a_n \int_0^{2\pi} P_L(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=n'_j}^{n''_j} a_n \int_0^{2\pi} P_L(x)\,\varphi_n(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{L} a_{n_j} \int_0^{2\pi} P_L(x)\,\varphi_{n_j}(x)\,dx,$$

also nach (58) und (60)

$$I > \sum_{j=1}^{L} |a_{n_j}| \left(\frac{1}{144M} \frac{3\pi}{2} - \frac{10M}{2^j} - 20 \left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} \frac{1}{\max\limits_{1 \leq \mu \leq j+1} N_\mu} \right) -$$

$$(62b) \qquad - \sum_{j=1}^{L} 100 \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{j}{2}} N_j \min_{1 \leq \mu \leq j} \frac{1}{N_\mu} \max_{n'_j \leq \nu \leq n''_j} |a_\nu| >$$

$$> \sum_{j=1}^{L} |a_{n_j}| \left(\frac{1}{144M} \frac{3\pi}{2} - \frac{10M}{2^j} - 20 \left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} \min_{1 \leq \mu \leq j+1} \frac{1}{N_\mu} \right) -$$

$$- 400 \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Aus (62a) und (62b) folgt unmittelbar Satz IV.

§. 2.

Es sei $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots$ ein beliebiges normiertes Orthogonalsystem bezüglich $[0, 2\pi]$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Zahlenfolge und $n_1 < n_2 < \ldots$ eine Indexfolge. Die Probleme, welche in diesem Paragraphen behandelt werden, sind folgender Art. Es sollen hinreichende Bedingungen über die ε_ν und n_ν angegeben werden, welche die Lösbarkeit des Gleichungsystems

$$(63) \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\, \varphi_{n_k}(x)\, dx = \varepsilon_k$$

in einer vorgegebene Funktionenklasse sichern. Wenn das Orthogonalsystem die Bedingung (25) erfüllt und jede der Funktionen $\varphi_\nu(x)$ stückweise stetig ist, hatte ich[5]) die Existenz einer Indexfolge bewiesen, bei welchen das System sicherlich L-integrable Lösung besitzt, falls nur die ε_ν eine Nullfolge bilden. Den Beweis hatte ich auf einen Absolutkonvergenz-Satz und auf einen Satz von S. Banach[6]) gegründet. Eine Lücke dieses Beweises habe ich im § 1. ausgefüllt und gleichzeitig den Satz verschärft. So ergibt sich also der

Satz V. *Es sei* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots$ *ein normiertes Orthogonalsystem mit der Eigenschaft* (25). *Dann existiert eine Indexfolge* $n_1 < n_2 < \ldots$ *so, daß das System* (63) *eine L-integrable Lösung besitzt, falls nur die Folge* ε_ν *eine Nullfolge bildet.*

---

[5]) S. Sidon, Über Orthogonalsysteme, *Compositio Math.*, **7** (1940), S. 372—375.

[6]) S. Banach, Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia Math.*, **2** (1930), S. 207—228.

Wie ich nach der Abfassung meiner Compositio-Note [5]) erkannte, bewies Herr J. MARCINKIEWICZ in seiner Arbeit[7]) u. a. den folgenden Satz: wenn die Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ im $[0, 2\pi]$ überall stetig sind und $\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|\,dx > 0$, so hat das Gleichungsystem (63) eine L-integrable Lösung, falls nur ε_ν eine Nullfolge bildet. Satz V scheint sich mit der von MARCINKIEWICZ angewandten Beweismethode nicht zu ergeben.

Wenn $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ das trigonometrische System bedeutet, bewies ich[8]), daß das System

$$(64) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n_k x\,dx = \varepsilon_k', \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin n_k x\,dx = \varepsilon_k''$$

sicherlich lösbar ist in der Klasse C der überall stetigen Funktionen, wenn die Indexfolge n_k eine B_2^*-Folge bildet, falls nur $\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k'^2 + \varepsilon_k''^2) < \infty$. B_2^*-Folge nennt man eine Folge $n_1, n_2, \ldots$, wenn die Koeffizientenfolge der formalen Laurentreihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{-n_k} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu z^\nu$$

gleichmäßig beschränkt ist. Solche Indexfolgen können viel „dichter" sein als die lakunären Folgen; eine B_2^*-Folge kann die Abschätzung $n_k = O(k^3)$ erfüllen. Ich bewies nur die Existenz einer solchen Folge und ich weiß nicht, ob es nicht B_2^*-Folgen mit $n_k = O(k^{2+\varepsilon})$ existieren. In der Richtung meines Satzes [8]) bewies ich

Satz VI. *Es seien ε_k', ε_k'' zwei Zahlenfolgen mit der Eigenschaft, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\varepsilon(\varepsilon_k'^2 + \varepsilon_k''^2)$ bei jedem festen positiven ε konvergiert. Dann ist des System*

---

[7]) J. MARCINKIEWICZ, Sur les séries orthogonales, *Studia Math.*, **8** (1939), S. 1–27.

[8]) S. SIDON, Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 536–539. In meiner Arbeit: Bemerkungen über Fourier und Potenreihen, *diese Acta*, **7** (1936), S. 85–94 bewies ich, daß $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k$ $B_k = O(1)$ genügt.

$$(65)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos k^2x\,dx = \varepsilon_k', \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin k^2x\,dx = \varepsilon_k''$$

sicherlich lösbar in der Klasse C.

Der wahre Grund dieses Satzes liegt in der zahlentheoretischen Tatsache, daß die Lösungzahl der Gleichung $x^2+y^2=n$ — wie bekannt — $O(n^\varepsilon)$ ist. Mit gleicher Mühe beweisen wir gleich den allgemeinen

Satz VII. *Für die Indexfolge $n_1 < n_2 < \dots$ gelte*

$$(66a)\qquad \frac{n_{2k}}{n_k} > q > 1 \qquad k = 1, 2, \dots$$

und für die Lösungzahl λ_n der Gleichung $n_k + n_l = n$ gelte die Abschätzung

$$(66b)\qquad \lambda_n = O(\varphi(n)),$$

wo $\varphi(x)$ eine positive, nichtabnehmende Funktion mit der Eigenschaft

$$(66c)\qquad \varphi(2x) < c_1\varphi(x)$$

bedeutet (c_1 absolute Konstante). Es sei ferner $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ eine Zahlenfolge, für welche

$$(66d)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{\varphi(n_{2k})}{\beta_k} < \infty$$

und

$$(66e)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(n_{2k})\left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_{k+1}}\right) < \infty.$$

Wenn die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu(\varepsilon_\nu'^2 + \varepsilon_\nu''^2)$ konvergiert, so ist das System (64) in Klasse C sicherlich lösbar[9]*.*

Beweis. Es sei $z = re^{i\vartheta}$, $b_0 = 0$, a_ν, b_ν reell und

$$(67)\qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - ib_\nu)z^\nu, \quad \Re f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu\cos\nu\vartheta + b_\nu\sin\nu\vartheta).$$

Für eine positive Funktion $\psi(\vartheta)$ gilt nach der Hölderschen Ungleichung

---

[9]) Die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2 + \varepsilon_\nu''^2)$ ist offenbar notwendig, damit $f(x) \in C$ sei. Für $\varphi(n) = c$, $\beta_\nu = c$ ergibt sich also eine Verschärfung meines Satzes in [8]).

$$\int_0^{2\pi} \psi^2(\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)^{\frac{2}{3}}\,\psi(\vartheta)^{\frac{4}{3}}\,d\vartheta \leqq \left(\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\,d\vartheta\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)^4\,d\vartheta\right)^{\frac{1}{3}},$$

d. h.

$$\frac{\left(\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} \psi^2(\vartheta)\,d\vartheta} < \frac{\left(\int_0^{2\pi} \psi^2(\vartheta)\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} \psi^4(\vartheta)\,d\vartheta}.$$

Es sei hier $\psi(\vartheta) = |\Re f(z)|$; dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|^2\,d\vartheta = a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \leqq$$

$$\leqq 2\left[a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2 + b_\nu^2)\right] = 2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Re f(z))^2\,d\vartheta,$$

also

$$\frac{\left(\int_0^{2\pi} |\Re f(z)|\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} (\Re f(z))^2\,d\vartheta} > \frac{\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} (\Re f(z))^4\,d\vartheta}.$$

Nach einer Ungleichung von M. Riesz gilt

$$\int_0^{2\pi} (\Re f(z))^4\,d\vartheta < c_2 \int_0^{2\pi} |f(z)|^4\,d\vartheta$$

mit einer absoluten Konstanten c_2; also

$$\text{(68)} \qquad \frac{\left(\int_0^{2\pi} |\Re f(z)|\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} (\Re f(z))^2\,d\vartheta} > \frac{1}{4c_2}\,\frac{\left(\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\vartheta\right)^2}{\int_0^{2\pi} |f(z)|^4\,d\vartheta}.$$

Wenn $f(z) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu z^{n_\nu}$, $\alpha_\nu = a_\nu - i b_\nu$, so gilt

$$f^2(z) = \sum_{\nu \leqq 2 n_k} g_\nu z^\nu,$$

wo

$$g_\nu = \sum_{n_j + n_l = \nu} \alpha_j \alpha_l.$$

Nach der Voraussetzung ist die Anzahl der Glieder in der rechtseitigen Summe $\leqq \varphi(\nu)$; also gilt nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|g_\nu|^2 \leqq \varphi(\nu) \cdot \sum_{n_j+n_l=\nu} |\alpha_j|^2 |\alpha_l|^2$$

und wegen (66c)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^4 d\vartheta = \sum_{\nu \leqq 2n_k} |g_\nu|^2 \leqq$$

$$\leqq \varphi(2n_k)\left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2\right)^2 \leqq c_1 \varphi(n_k)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\vartheta\right)^2.$$

Aus dieser Ungleichung und (68) folgt bei jeder Wahl von a_ν und b_ν und k

$$(69)\quad \left(\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\nu=1}^{k} (a_\nu \cos n_\nu x + b_\nu \sin n_\nu x)\right| dx\right)^2 >$$

$$> \frac{c_3}{\varphi(n_k)} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \cos n_\nu x + b_\nu \sin n_\nu x\right]^2 dx$$

mit absolut-konstantem c_3. Es sei

$$(70)\qquad \sum_{\nu=1}^{K} (a_\nu \cos n_\nu x + b_\nu \sin n_\nu x) = F(x)$$

und $S_n(x)$ bedeute das n-te Cesàro-Mittel erster Ordung von $F(x)$ (wo natürlich bei der Mittelbildung auch die verschwindenden Glieder zu rechnen sind). Nach (66a) gilt dann für $j \leqq K$

$$\sum_{h=1}^{j} (a_h^2 + b_h^2) \leqq \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \sum_{h=1}^{j} \left(\frac{n_{2j}-n_h+1}{n_{2j}+1}\right)^2 (a_h^2+b_h^2) =$$

$$= \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_{n_{2j}}^2(x)\, dx,$$

also nach (69) für $1 \leqq j \leqq K$

$$(71)\quad \sum_{h=1}^{j} (a_h^2 + b_h^2) < c_4(q)\varphi(n_{2j})\left(\int_0^{2\pi} |S_{n_{2j}}(x)|\, dx\right)^2 <$$

$$< c_4(q)\varphi(n_{2j})\left(\int_0^{2\pi} |F(x)|\, dx\right)^2$$

wegen einer bekannten Ungleichung. Es sei $s_j = \sum_{h=1}^{j} (a_h^2 + b_h^2)$; aus (69) folgt, wenn wir $a_\nu = a'_\nu \sqrt{\beta_\nu}$, $b_\nu = b'_\nu \sqrt{\beta_\nu}$ setzen,

$$U = \sum_{h=1}^{K} (a_h'^2 + b_h'^2) =$$

$$(72) \quad = \sum_{h=1}^{K} (a_h^2 + b_h^2) \frac{1}{\beta_h} = s_1 \frac{1}{\beta_1} + (s_2 - s_1) \frac{1}{\beta_2} + \ldots + (s_K - s_{K-1}) \frac{1}{\beta_K} =$$

$$= s_1 \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) + \ldots + s_{K-1} \left(\frac{1}{\beta_{K-1}} - \frac{1}{\beta_K} \right) + s_K \frac{1}{\beta_K}$$

d. h. aus (71) und (72)

$$U < c_4(q) \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{K} \sqrt{\beta_\nu} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right| dx \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left[\varphi(n_2) \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) + \ldots + \varphi(n_{2K-2}) \left(\frac{1}{\beta_{K-1}} - \frac{1}{\beta_K} \right) + \frac{\varphi(n_{2K})}{\beta_K} \right] <$$

$$< c_5(q) \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{K} \sqrt{\beta_\nu} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right| dx \right)^2$$

nach (66d) und (66e). Es gilt also die Ungleichung

$$(73) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{K} \sqrt{\beta_\nu} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right| dx >$$

$$> c_6(q) \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{K} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right)^2 dx \right]^{1/2}.$$

Wie ich bewies[8]), ist der Satz VII im Spezialfalle $\varphi(n) = c$ eine Folge der Ungleichung

$$(73a) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{K} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right| dx >$$

$$> c_7(q) \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{K} (a'_\nu \cos n_\nu x + b'_\nu \sin n_\nu x) \right)^2 dx \right]^{1/2}.$$

Der allgemeine Fall ist ganz analogerweise eine Folge von (73).

In der Arbeit [8]) gab ich eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (64) in der Klasse C unter der alleinigen

Bedingung $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)<\infty$. Wie mein Beweis zeigt, folgt aus der Lösbarkeit des Systems (64) in der Klasse K der beschränkten und L-integrierbaren Funktionen mit vorgeschriebenes ε_k', ε_k'' und $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)<\infty$ sofort die Lösbarkeit der analogen Problem in der Klasse C. Und zwar gilt dies auch für beliebige Orthogonalsysteme. Im folgenden zeigen wir einen weiteren Reduktionssatz.

Satz VIII. *Wenn das System* (63) *mit* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu^2<\infty$ *eine Lösung aus der Klasse* L_p *mit* $p>2$ *besitzt, so besitzt es auch eine Lösung aus der Klasse* C.

Beweis. Wie eine geometrische Betrachtung zeigt (siehe Zygmund, *Trigonometrical Series* (Warszawa, 1935), besonders p. 218—219), ist die notwendige und hinreichende Bedingung der Lösbarkeit von (64) in der Klasse K (also auch in der Klasse C), wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)<\infty$ gilt, daß

(74a) $$\max_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_k,\beta_k}|a_1\alpha_1+b_1\beta_1+\ldots+a_k\alpha_k+b_k\beta_k|> \\ >c_1(a_1^2+b_1^2+\ldots+a_k^2+b_k^2)^{1/2},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_k$; $b_1, b_2, \ldots, b_k$ beliebige reelle Konstanten und $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ die Fourierkonstanten

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n_\nu x\,dx,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin n_\nu x\,dx \qquad (\nu=1,2,\ldots,k)$$

derjenigen Funktionen durchlaufen, für welche $|f(x)|\leq 1$ überall gilt und c_1 eine von den a_ν, b_ν und k unabhängige Konstante bedeutet. Wenn wir das trigonometrische System durch ein allgemeines Orthogonalsystem ersetzen und die Lösbarkeit von (63) in Klasse L_p untersuchen, so folgt ganz ähnlich als notwendige und hinreichende Bedingung:

(74b) $$\max_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}|d_1\gamma_1+\ldots+d_k\gamma_k|>c_2(d_1^2+d_2^2+\ldots+d_k^2)^{1/2},$$

wo $d_1, d_2, \ldots, d_k$ beliebige reelle Konstante, c_2 eine von den d_ν und k unabhängige Konstante bedeuten und die $\gamma_\nu=\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_{n_\nu}(x)\,dx$ die verallgemeinerte Fourier-Konstanten einer $f(x)$ bedeuten, für welche $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \leq 1$ gilt. Es ist aber

$$\max_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k} |d_1\gamma_1 + d_2\gamma_2 + \ldots + d_k\gamma_k| =$$

$$= \operatorname{Max}_f \left| \int_0^{2\pi} f(x) [d_1\varphi_{n_1}(x) + d_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + d_k\varphi_{n_k}(x)] \right| dx =$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} |d_1\varphi_{n_1}(x) + d_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + d_k\varphi_{n_k}(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

nach der Hölderschen Ungleichung; also ist (74b) mit der Ungleichung

$$\text{(74c)} \quad \int_0^{2\pi} |d_1\varphi_{n_1}(x) + d_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + d_k\varphi_{n_k}(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx >$$

$$> c_3 (d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2)^{\frac{p}{2p-2}}$$

($d_1, d_2, \ldots, d_k$ beliebig) äquivalent. Wenn aber $p > 2$ ist, so ist $\frac{p}{p-1} < 2$, also folgt, da allgemein

$$\int_0^{2\pi} |F(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_0^{2\pi} |F(x)|^{\frac{p-2}{p-1}} |F(x)|^{\frac{2}{p-1}} dx <$$

$$< \left[\int_0^{2\pi} |F(x)| dx \right]^{\frac{p-2}{p-1}} \left[\int_0^{2\pi} |F(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

gilt, aus (74c)

$$c_3 (d_1^2 + \ldots + d_k^2)^{\frac{p}{2p-2}} <$$

$$< \left[\int_0^{2\pi} |d_1\varphi_{n_1}(x) + \ldots + d_k\varphi_{n_k}(x)| dx \right]^{\frac{p-2}{p-1}} (d_1^2 + \ldots + d_k^2)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dann ist aber

$$\int_0^{2\pi} |d_1\varphi_{n_1}(x) + \ldots + d_k\varphi_{n_k}(x)| dx \geq c_4 (d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2)^{\frac{1}{2}},$$

was eben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß (63) mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 < \infty$ in der Klasse K (also auch in der Klasse C) lösbar sei.

Es ist wahrscheinlich, daß das System (64) mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_\nu'^2 + \varepsilon_\nu''^2) < \infty$ in der Klasse C lösbar ist, wenn die Indexfolge $n_1, n_2, \ldots$ die Bedingung $n_{i_1} + n_{i_2} \neq n_{i_3}$ erfüllt. Satz IX wird zeigen, daß der analoge Satz richtig ist, wenn die Klasse C durch die Klasse P der positiven und L-integrablen Funktionen ersetzt wird. Es existieren bekanntlich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine trigonometrische Reihe die Fourierreihe einer positiven Funktion sei; es scheint mir aber sehr schwer, Satz IX aus diesen abzuleiten. Ein Beispiel für eine die obige Bedingung $n_{i_1} + n_{i_2} \neq n_{i_3}$ erfüllende Folge bildet offenbar die Folge $c, d+c, 2d+c, \ldots, kd+c, \ldots$ mit $c < d$.

Satz IX. *Es sei* $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_\nu'^2 + \varepsilon_\nu''^2) < \infty$ *und* $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *eine Indexfolge, für welche immer* $n_{i_1} + n_{i_2} \neq n_{i_3}$ *gilt. Dann ist das System* (64) *in der oben definierten Klasse P lösbar.*

Vor dem Beweis des Satzes IX beweisen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz B. *Wenn die Indexfolge* $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *die obige Bedingung* $n_{i_1} + n_{i_2} \neq n_{i_3}$ *erfüllt und für*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{K} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

überall

$$-m \leqq f(x) \leqq M, \quad m > 0, \quad M > 0 \tag{75}$$

gültig ist, so ist

$$\left(\sum_{\nu=1}^{K} (a_k^2 + b_k^2)\right)^{1/2} \leqq \sqrt{2} \min (M, m).$$

Beweis des Hilfssatzes B. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m > M$. Da die Funktionen $M - f(x)$, $f(x) + m$ nichtnegativ sind, gilt nach der Cauchyschen Ungleichung

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \left[\int_0^{2\pi} (M-f)^2 (m+f)\, dx\right]^2 = \\ &= \left[\int_0^{2\pi} (M-f)^{3/2} \{(M-f)^{1/2} (m+f)\}\, dx\right]^2 \leqq \\ &\leqq \int_0^{2\pi} (M-f)^3\, dx \int_0^{2\pi} (M-f)(m+f)^2\, dx = I_2 I_3. \end{aligned} \tag{76}$$

Nun ist

$$I_1^2=\int_0^{2\pi}(M^2-2Mf+f^2)(m+f)\,dx=$$

$$=2\pi M^2m+(m-2M)\pi\sum_{\nu=1}^{K}(a_\nu^2+b_\nu^2)$$

da $\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$ wegen der des Verschwindens des konstanten Gliedes von $f(x)$ und $\int_0^{2\pi}f^3(x)\,dx=0$ wegen der Indexbedingung $n_{i_1}+n_{i_2}\neq n_{i_3}$. Es folgt ganz ähnlich

$$I_2=2\pi M^3+3\pi M\sum_{\nu=1}^{K}(a_\nu^2+b_\nu^2)$$

und

$$I_3=2\pi m^2M+(M-2m)\pi\sum_{\nu=1}^{K}(a_\nu^2+b_\nu^2).$$

Aus (76) folgt also, wenn wir $\sum_{\nu=1}^{K}(a_\nu^2+b_\nu^2)$ mit S^2 bezeichnen,

$$(2M^2m+(m-2M)S^2)^2\leqq(2M^3+3MS^2)(2m^2M+(M-2m)S^2),$$
$$4M^4m^3+4M^2m(m-2M)S^2+(m-2M)^2S^4\leqq$$
$$\leqq 4M^4m^2+(6M^2m^2+2M^4-4mM^3)S^2+3M(M-2m)S^4,$$

also auch offenbar

$$4M^2m(m-2M)+(m-2M)^2S^2\leqq$$
$$\leqq 6M^2m^2+2M^3(M-2m)+3M(M-2m)S^2,$$
$$(m^2+2Mm+M^2)S^2\leqq 2M^2(m^2+2Mm+M^2),$$
$$S\leqq M\sqrt{2}.$$

Beweis des Satzes IX. Es sei $\eta_1, \eta_2, \ldots$ eine konvexe Nullfolge von der Beschaffenheit, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2}{\eta_{n_\nu}^2} \tag{77}$$

noch konvergiert. Wenn wir Hilfssatz B anwenden, so folgt nach einem wohlbekannten Satze von F. Riesz[10]) die Existenz einer

[10]) F. Riesz, Sur certain systemes d'équations integrales, *Annales de l'École Normale Superieure*, **28** (1911), S. 33–62.

nichtabnehmenden Funktion $\alpha(x)$, für welche

$$(78)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n_\nu x\, d\alpha(x)=\frac{\varepsilon'_\nu}{\eta_{n_\nu}},\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n_\nu x\, d\alpha(x)=\frac{\varepsilon''_\nu}{\eta_{n_\nu}}.$$

Bekanntlich[11]) ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\cos\nu x$ die Fourierreihe einer positiven und L-integrablen Funktion $\psi(x)$; wenn $\sigma_n^+(x)$ das n-te Cesàro-Mittel der Funktion $\psi(x)$, $\sigma_n(x)$ das n-te Cesàro-Mittel der komponierten Reihe von $d\alpha(t)$ und $\psi(x)$ bedeutet, so ist

$$(79)\qquad \sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n^+(x+t)\,d\alpha(t),$$

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(x)-\sigma_m(x)|\,dx\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|d\alpha(t)|\int_0^{2\pi}|\sigma_n^+(x+t)-\sigma_m^+(x+t)|\,dx\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|d\alpha(t)|\left[\int_0^{2\pi}|\sigma_n^+(x)|\,dx+\int_0^{2\pi}|\sigma_m^+(x)|\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\eta_0(\alpha(2\pi)-\alpha(0)),$$

also nach dem bekannten Satze[12]) ist die komponierte Reihe die Fourierreihe einer L-integrablen Funktion, welche nach (79) positiv ist, qu. e. d.

Bisher haben wir die Lösbarkeit des Systems (64) in einigen Funktionenklassen untersucht, wenn nur $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)<\infty$; von der Lösung selbst wußten wir nichts anderes, als daß sie zu der geforderten Klasse gehört. Wenn speziell die Indexfolge durch $n_k=4^{2^k}$ $(k=1,2,\dots)$ gegeben ist, dann können wir — wieder $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)<\infty$ vorausgesetzt — die Existenz einer Lösung von (64) im Klasse C sichern, welche nur „wenige" nichtverschwindende Fourierkoeffizienten besitzt. Genauer:

Satz X. *Es sei* $n_k=4^{2^k}$ $(k=1,2,\dots)$ *und* $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu'^2+\varepsilon_\nu''^2)$ *vorgegeben. Dann hat des System* (64) *eine solche Lösung, bei*

[11]) Siehe A. Zygmund, *Trigonometrical Series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 109.

[12]) Satz von Steinhaus-Gross. Siehe Zygmund, *Trigonometrical Series*, S. 84.

welcher für die Indizes $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$ der nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten

$$N_k^{1/k} \geqq q > 1$$

gilt, unabhängig von k.

Beweis des Satzes X. Nach dem Satze der Arbeit [8]) ist das System

$$(80) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 4^{2^i} x\,dx = \varepsilon_i', \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin 4^{2^i} x\,dx = \varepsilon_i'',$$

mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_\nu'^2 + \varepsilon_\nu''^2) < \infty$ in der Klasse C lösbar; diese Lösung sei $f_1(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$. Wir betrachten diejenige trigonometrische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \cos \nu y$, welche durch formale Ausmultiplizieren des Produktes $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \cos 4^{2^i} y)$ entsteht. Die Partialprodukte $\prod_{i=1}^{K} (1 + \cos 4^{2^i} y)$ sind offenbar nichtnegativ und wegen der Seltenheit der Indizes haben sie nach Multiplikation und Umordnung die Form $\sum_{\nu=0}^{M} c_\nu \cos \nu y$, wo $M = 4^{2^1} + 4^{2^2} + \ldots + 4^{2^K}$. Dann ist aber nach einem bekannten Satze[13]) die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos \nu y$ eine Fourier—Stieltjes-Reihe und nach einem ebenfalls bekannten Satze[14]) die komponierte Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ die Fourierreihe einer überall stetigen Funktion $f_2(x)$. Diese Funktion erfüllt offenbar (80), die nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten haben die Indizes $4^{2^{i_1}} + 4^{2^{i_2}} + \ldots + 4^{2^{i_r}}$, also, wenn $N_1 < N_2 < \ldots$ die der Größe nach geordnete Folge dieser Indizes bedeutet, so ist offenbar $N_k > 2^k$ bei jeder k erfüllt.

Wie ich früher bewiesen hatte, ist das System (64) in der Klasse L der nach Lebesgue integrierbaren Funktionen lösbar, falls nur die vorgegebenen ε_ν', ε_ν'' eine Nullfolge bilden und die Indizes

---

13) Zygmund, *Trigonometrical Series,* S. 87—88.

14) Zygmund, *Trigonometrical Series,* S. 100.

n_k die Bedingung $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$ erfüllen. Es ist naheliegend zu fragen, ob man nicht ähnlicherweise die Lösbarkeit in der Klasse L_p, $1 < p < 2$ sichern kann. Eine Möglichkeit wäre für den Zahlen ε_ν, ε_ν'' eine Bedingung von der Art $\sum_{\nu=1}^{\infty} (|\varepsilon_\nu'|^\alpha + |\varepsilon_\nu''|^\alpha)$ zu fordern, wo α nur von p abhängt; das kommt aber nach einem Satze von A. ZYGMUND[15]) nicht im Betracht, wie auch die Indexfolge $n_1, n_2, \ldots$ sei. Man könnte aber denken, daß, wenn wir die Zahlen ε_ν' und ε_ν'' der Voraussetzung

(81) $$|\varepsilon_\nu'| \leqq \frac{A}{\nu^\delta}, \ |\varepsilon_\nu''| \leqq \frac{A}{\nu^\delta} \qquad (\delta < 1/2, \ \delta = \delta(p))$$

unterwerfen und die Indizes $n_1, n_2, \ldots$ „genügend zerstreut" wählen, dann gibt es stets eine $f(x)$ in L_p $(1 < p < 2)$ mit $f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ so, daß $a_{n_k} = \varepsilon_k'$, $b_{n_k} = \varepsilon_k''$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gilt. Wir zeigen, daß auch dies nicht der Fall ist. Wenn nämlich solche p mit $1 < p < 2$, δ und Indexfolge $n_1 < n_2 < \ldots$ existieren, so bilden wir die Reihe

(82) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} \log k} \cos n_k x \sim g_1(x).$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten in (82) konvergiert, existiert nach einem Satze von LITTLEWOOD[16]) eine Folge $\eta_1, \eta_2, \ldots$ mit $|\eta_k| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ so, daß die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\eta_k}{\sqrt{k} \log k} \cos n_k x$ die Fourierreihe einer Funktion $g_2(x)$ aus der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}$ ist. Nach einem Satze von KACZMARZ[17]) ist diejenige trigonometrische Reihe, welche durch Komposition der Fourierreihe zweier Funktionen aus der Klasse L_p bzw. $L_{\frac{p}{p-1}}$ entsteht, die Fourierreihe einer beschränkten Funktion $g_3(x)$. Es sei nun $\varepsilon_\nu' = \frac{\overline{\eta}_\nu}{\nu^\delta}$, $\varepsilon_\nu'' = \frac{\overline{\eta}_\nu}{\nu^\delta}$. Dann ist (81) erfüllt und wenn unsere Behauptung richtig wäre, exi-

[15]) A. ZYGMUND, On the convergence of lacunary trigonometrical series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930), S. 90–107.

[16]) J. E. LITTLEWOOD, On the mean-values of power series, *Proceedings London Math. Society*, **25** (1926), S. 328–337.

[17]) S. KACZMARZ, On some classes of Fourier-series, *Journal London Math. Society*, **8** (1933), S. 39–46.

stierte eine Funktion $g_4(x)$ in L_p mit

$$g_4(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),\; a_{n_\nu} = \frac{\bar{\eta}_\nu}{\nu^\delta},\; b_{n_\nu} = \frac{\bar{\eta}_\nu}{\nu^\delta}.$$

Wenn wir den obenerwähnten Satz von KACZMARZ auf die Funktionen $g_2(x)$ und $g_4(x)$ anwenden, gelangen wir zu dem Ergebnis, daß die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2+\delta}\log k} \cos n_k x$ die Fourierreihe einer beschränkten Funktion ist, also auch die arithmetischen Mittel erster Ordnung dieser Reihe überall beschränkt sind. Das ist aber für $x=0$ augenscheinlich nicht der Fall.

§. 3.

Der wohlbekannte Satz von YOUNG—HAUSDORFF wirft Licht auf den Zusammenhang des Konvergenzexponenten der Fourierkoeffizienten und des Integrierbarkeitsexponenten der dargestellten Funktion $f(x)$; gehört z. B. $f(x)$ der Klasse L_p, $1 < p < 2$, so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (|a_\nu|^{\frac{p}{p-1}} + |b_\nu|^{\frac{p}{p-1}})$ konvergent und der Exponent $\frac{p}{p-1}$ läßt sich im allgemeinen nicht verkleinern. ZYGMUND[15]) und PALEY[18]) bemerkten, daß, wenn man nicht alle Koeffizienten betrachtet, sondern nur gewisse a_{n_k} und b_{n_k}, wobei $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$, so kann man viel mehr aussagen, nämlich daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n_\nu}^2 + b_{n_\nu}^2)$ konvergiert. Wie dieselben Verfasser später zeigten, konvergiert dann merkwürdigerweise auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (|a_{n_\nu}| + |b_{n_\nu}|)$ und zwar auch in dem Falle, wenn die Funktion $f(x)$ und ihre Konjugierte zu der Klasse L gehören.

Die Indexfolge n_i ist sehr selten; wir betrachten anstatt deren solche Indexfolgen $n_1 < n_2 < \ldots$, wie wir sagen, B_l-Folgen, für welchen die Lösungzahl der Gleichung

(83) $$n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_l} = N$$

unter einer von N unabhängigen Schranke bleibt. Diejenigen In-

---

[18]) R. E. A. C. PALEY, On the lacunary coefficients of power series, *Annals of Math.*, **34** (1933), S. 615–616.

dexfolgen $j_1 < j_2 < \ldots$, für welche $\frac{j_{i+1}}{j_i} \geqq q > 1$ gilt, gehören auch zu den B_l-Folgen bei jeder ganzen $l \geqq 2$. Wie wir schon bemerkten, können solche B_l-Folgen viel dichter sein, als eine solche Folge $j_1, j_2, \ldots$ Betrachten wir einfachheitshalber den Fall $l=2$ und untersuchen die dichteste Folge $1 = d_1 < d_2 < \ldots$ der ganzen Zahlen, für welche die Lösungzahl $d_i + d_k = N$ höchstens 1 ist. Offenbar ist die Anzahl der verschiedenen der Summen $d_i + d_k$ $(1 \leqq i \leqq k \leqq n-1)$ höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$, also gilt

$$d_n \leqq d_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2};$$

hieraus folgt durch Addition $d_n \leqq \frac{n^3}{6} + 1$. Wahrscheinlich existieren B_2-Folgen $d_1' < d_2' < \ldots$ mit $d_n' = O(n^{2+\varepsilon})$. Es sei immer $l \geqq 2$ und ganz. Wir beweisen die folgenden Sätze.

Satz XI. *Es sei die Indexfolge* $n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* B_l*-Folge,* $q > 2$, $f(x) \in L_{\frac{lq}{lq-1}}$ *und* $f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^q < \infty$.

Satz XII. *Es sei* $n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* B_l*-Folge,* $q > 2l$ *und* $g(x) \in L_{\frac{q}{q-1}}$, *wo* $g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{K} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) = O\left(K^{1-\frac{2l}{q}}\right)$.

Bevor wir diese Sätze beweisen, schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz C. *Wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^{\frac{q}{q-1}} < \infty$, $q \geqq 2$ *und* $n_1, n_2, \ldots$ *eine* B_l*-Folge bedeutet, dann gehört die Funktion* $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{i n_k x}$ *zu der Klasse* H_{lq} *und* $\int_0^{2\pi} |g(x)|^{lq} dx \leqq c_6(l,q) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^{\frac{q}{q-1}}\right)^{l(q-1)}$

Vorbemerkung. Einen in ähnlicher Richtung wie Hilfssatz C liegenden Satz für die spezielleren Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x)$ mit $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geqq q > 1$ findet man in einer Note des Herrn A. ZYGMUND[19]).

Beweis des Hilfssatzes C. Es sei $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{n_k}\right)^l = \sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m$. Wenn wir beweisen, daß $\sum_{m=1}^{\infty} |A_m|^{\frac{q}{q-1}}$ konvergiert, dann ist nach dem Satze von YOUNG—HAUSDORFF $[g(x)]^l \in H_q$. Es gilt offenbar

$$(84) \qquad A_m = \sum_{n_{i_1}+\ldots+n_{i_l}=m} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \ldots \beta_{i_l}.$$

Dann ist aber

$$|A_m|^{\frac{q}{q-1}} = \left| \sum_{n_{i_1}+\ldots+n_{i_l}=m} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \ldots \beta_{i_l} \right|^{\frac{q}{q-1}} \leqq$$

$$\leqq c_7(l, q) \sum_{n_{i_1}+\ldots+n_{i_l}=m} |\beta_{i_1}|^{\frac{q}{q-1}} \ldots |\beta_{i_l}|^{\frac{q}{q-1}},$$

da die erste Summe nach der Voraussetzung nur Glieder enthält, dessen Anzahl unter einer von m unabhängigen Schranke bleibt. Dann ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty} |A_m|^{\frac{q}{q-1}} \leqq c_7(l, q) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|^{\frac{q}{q-1}} \right)^l, \text{ qu. e. d.}$$

Hilfssatz D. *Wenn* $q \geqq 2l$, $z = e^{i\varphi}$, $n_1, n_2, \ldots$ *die obige Indexfolge und* $P(z) = \sum_{k=1}^{K} \gamma_k z^{n_k}$, *dann ist*

$$\int_{|z|=1} |P(z)|^q d\varphi \leqq c_8(l, q) K^{\frac{q}{2}-l} \left(\sum_{k=1}^{K} |\gamma_k|^2 \right)^{\frac{q}{2}}.$$

Beweis. Es sei $q' < q < q''$, wo q' und q'' gerade ganze Zahlen bedeuten, und es sei vorausgesetzt, daß Hilfssatz D für gerade Exponenten schon bewiesen sei. Wenn wir die Zahlen δ_1 und δ_2 durch

$$\delta_1 + \delta_2 = 1, \; q'\delta_1 + q''\delta_2 = q$$

definieren, so folgt aus der Hölderschen Ungleichung

[19]) A. ZYGMUND, Note on trigonometrical and Rademacher series, *Prace mat. fiz.*, 44 (1936), S. 91—107.

$$\int_{|z|=1} |P(z)|^q d\varphi = \int_{|z|=1} |P(z)|^{\delta_1 q'} |P(z)|^{\delta_2 q''} d\varphi <$$

$$< \Big(\int_{|z|=1} |P(z)|^{q'} d\varphi\Big)^{\delta_1} \Big(\int_{|z|=1} |P(z)|^{q''} d\varphi\Big)^{\delta_2} <$$

$$< c_8(l,q)^2 K^{\left(\frac{q'}{2}-l\right)\delta_1 + \left(\frac{q''}{2}-l\right)\delta_2} \left(\sum_{k=1}^{K} |\gamma_k|^2\right)^{\frac{1}{2}(q'\delta_1 + q''\delta_2)} =$$

$$= c_9(l,q) K^{\frac{q}{2}-l} \left(\sum_{k=1}^{K} |\gamma_k|^2\right)^{\frac{q}{2}},$$

wie behauptet. Es genügt also Hilfssatz D für gerade q zu beweisen. Aus der Definition der Indexfolge folgt offenbar, daß die Lösungzahl der Gleichung $n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_{q/2}} = N$ kleiner ist als $c_{10}(l,q) N^{\frac{q}{2}-l}$. Aus dieser Bemerkung und aus der Cauchyschen Ungleichung folgt, wenn wir $P(z)^{\frac{q}{2}} = \sum_{n=1}^{K^{\frac{q}{2}}} A_n z^n$ setzen,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |P(z)|^q d\varphi = \sum_{n=1}^{K^{\frac{q}{2}}} |A_n|^2 = \sum_{n=1}^{K^{\frac{q}{2}}} \Big| \sum_{n_{i_1}+\ldots+n_{i_{q/2}}=n} \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_{q/2}} \Big|^2 \leqq$$

$$\leqq c_{11}(l,q) \sum_{n=1}^{K^{\frac{q}{2}}} n^{\frac{q}{2}-l} \sum_{n_{i_1}+\ldots+n_{i_{q/2}}=n} |\gamma_{i_1}|^2 |\gamma_{i_2}|^2 \ldots |\gamma_{i_{q/2}}|^2 \leqq$$

$$\leqq c_{12}(l,q) K^{\frac{q}{2}-l} \left(\sum_{\nu=1}^{K} |\gamma_\nu|^2\right)^{\frac{q}{2}}.$$

Beweis des Satzes XI. Es sei

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$\Phi_K(z) = \sum_{k=1}^{K} (a_{n_k}^{q-1} \operatorname{sign} a_{n_k}^q \cos n_k x + b_{n_k}^{q-1} \operatorname{sign} b_{n_k}^q \sin n_k x).$$

Dann ist

$$S = \sum_{k=1}^{K} (|a_{n_k}|^q + |b_{n_k}|^q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \Phi_k(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^{\frac{lq}{lq-1}} dx\right]^{\frac{lq-1}{lq}} \left[\int_0^{2\pi} |\Phi_k(x)|^{lq} dx\right]^{\frac{1}{lq}}.$$

Wenn man Hilfssatz C mit $\Re g(x) = \Phi_K(x)$ anwendet, folgt

$$S \leqq \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^{\frac{lq}{lq-1}} dx \right]^{\frac{lq-1}{lq}} c_6(l, q) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}^{q-1} \operatorname{sign} a_{n_k}^q + \right.$$

$$\left. + b_{n_k}^{q-1} \operatorname{sign} b_{n_k}^q|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \leqq c_{13}(l, q) \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^{\frac{lq}{lq-1}} dx \right]^{\frac{lq-1}{lq}} S^{\frac{q-1}{q}},$$

also

$$S < c_{14}(l, q) \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^{\frac{lq}{lq-1}} dx \right]^{\frac{lq-1}{l}}$$

unabhängig von K, qu. e. d.

Beweis des Satzes XII. Es sei

$$U = \sum_{k=1}^{K} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \left[\sum_{k=1}^{K} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x) \right] dx,$$

also nach der Hölderschen Ungleichung

$$U \leqq \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right]^{\frac{q-1}{q}} \left[\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{K} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x) \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Wenn wir Hilfssatz D mit $\Re P(z) = \sum_{k=1}^{K} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x)$ anwenden, folgt, daß

$$U < c_{14}(l, q) \left(\int_0^{2\pi} |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} K^{\frac{1}{2} - \frac{l}{q}} U^{\frac{1}{2}},$$

also

$$U < c_{15}(l, q) K^{1 - \frac{2l}{q}} \left(\int_9^{2\pi} |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{2q-2}{q}}.$$

Satz XIII entspricht dem oben erwähnten Satz von ZYGMUND. In diesem Satze figuriert die Voraussetzung, daß $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ zu der Klasse L gehören. Im Satz XIII fordern wir nur die L-Integrierbarkeit von $f(x)$ selbst, und statt der anderen Hälfte der Zygmundschen Voraussetzung tritt die Forderung, daß die Reihe „lückenartig" sei. Genauer:

Satz XIII. *Es sei* $f(x) \in L$, $f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$, *die Indexfolge* $n_1 < n_2 < \dots$ *sei von der Beschaffenheit, daß* $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$ *und es gäbe ein* q' *mit* $q > q'^2 > 1$ *so, daß* $a_n = b_n = 0$ *für alle* n, *für welche*

$$\frac{n_k}{q'} \leqq n \leqq n_k q', \; n \neq n_k \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2)$ *konvergent.*

Beweis. Es sei l die kleinste ganze Zahl, für welche

$$1 + \frac{1}{q^{l-1} - 1} < q'$$

gilt. Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ eine beliebige Folge aus Zahlen ± 1, $0 \leqq l < r$ und wir betrachten die formal gebildete trigonometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(l,r)} \cos \nu x \sim \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_{ls+r} \cos n_{ls+r} x).$$

Ein analoger Gedankengang, wie beim Satz X, ergibt, daß alle diese Reihen Fourier—Stieltjes-Reihen sind. Dann sind aber alle Reihen, welche aus der Fourierreihe der L-integrierbaren Funktion $f(x)$ durch Komposition mit den Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(l,r)} \cos \nu x$ entstehen, nach einem bekannten Satze[20]) wieder Fourierreihen von L-integrierbaren Funktionen. Diese Reihen sind aber wegen der Indexbedingungen von der Form

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_{ls+r} (a_{n_{ls+r}} \cos n_{ls+r} x + b_{n_{ls+r}} \sin n_{ls+r} x).$$

Wie ich aber früher bewies[21]), ist die Quadratsumme der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe konvergent, wenn die Reihe von der Beschaffenheit ist, daß nach Komposition mit einer beliebigen Folge aus Zahlen ± 1 immer eine Fourierreihe einer L-integrierbaren Funktion entsteht; es ist also $\sum_{s=1}^{\infty} (a_{n_{ls+r}}^2 + b_{n_{ls+r}}^2)$ konvergent $(r = 0, 1, \dots, l-1)$, also auch die Reihe $\sum_{s=1}^{\infty} (a_{n_s}^2 + b_{n_s}^2)$.

---

[20]) Zygmund, *Trigonometrical Series*, S. 100.

[21]) S. Sidon, Ein Satz über die Fourierschen Reihen stetiger Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 34 (1932), S. 486.

Bezüglich Hilfssatz D bemerken wir folgendes. Es sei eine B_l-Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ gegeben mit der Zusatzbedingung, daß $\frac{n_{2k}}{n_k} \geqq \alpha > 1$. Wenn $N_1 < N_2 < \ldots$ die der Größe nach geordnete Summen von der Gestalt $n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_j}$ bedeuten (j fest und $1 \leqq j < l$) und $q \geqq 2l$, dann folgt analog

$$\text{(85)} \qquad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k z^{N_k} \right|^q d\varphi < c_{16}(q) K^{\frac{q}{2} - \frac{l}{j}} \left(\sum_{k=1}^{K} |a_k|^2 \right)^{\frac{q}{2}}.$$

Ob diese Ungleichung auch für $2l > q > \frac{2l}{j}$ gilt, konnte ich nicht entscheiden.

Wenn wir den Begriff der B_l-Folgen auf andere Orthogonalsysteme singemäß übertragen wollen, müssen wir ihn etwas abändern. Bezüglich einem Orthogonalsystem $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ nenne ich eine Indexfolge $n_1 < n_2 < \ldots$ eine B_l'-Folge, wenn die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten der Funktionenfolge $\Phi_\nu(x) = \left[\sum_{\mu=1}^{\nu} \varphi_{n_\mu}(x) \right]^l$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) (bezüglich dem System $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$) gleichmäßig beschränkt sind. Für das trigonometrische System und für $l = 2$ sind also die B_2'-Folgen mit den obenerwähnten B_2^+-Folgen identisch. Für das Walsh-System kann man den Beweis des Hilfssatzes D übertragen, also gilt für jede B_l'-Folge $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$, $f(x) \sim \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_{\nu_k}(x)$ die Ungleichung

$$\text{(86)} \qquad \int_{-1}^{+1} [f(x)]^{2l} dx < c_{17} \left(\sum_{k=1}^{K} a_k^2 \right)^l.$$

Ferner gilt, wenn $M_1 < M_2 < \ldots$ diejenige ganzen Zahlen bedeuten, welche im dyadischen System aus h Ziffern bestehen, für das Walsh-System die Ungleichung

$$\text{(87)} \qquad \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{j=1}^{K} a_j \varphi_{M_j}(x) \right|^p dx \leqq c_{18}(p) \left(\sum_{j=1}^{K} a_j^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

§. 4.

H. STEINHAUS warf die folgende interessante Frage auf. Es sei bekannt, daß sämtliche Partialsummen der Reihe $1+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$ überall nichtnegativ sind. Folgt aus dieser Eigenschaft, daß $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Diese Frage ist bisher unentschieden. J. SCHUR und J. VON NEUMANN bewiesen, daß wenigstens $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$. P. ERDŐS bewies[22] schärfer, daß die Anzahl der „großen" Koeffizienten „sehr klein" ist, d. h. die Anzahl derjenigen Koeffizienten a_ν, für welche $\nu \leqq n$ und $|a_\nu| \geqq \varepsilon$ gilt, ist beim festen ε kleiner als $c_{19}(\varepsilon)(\log n)^{\frac{4}{\varepsilon^2}}$. Wenn wir statt der Partialsummen arithmetische Mittel erster Ordnung nehmen, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht, wie die Fejérsche formale Reihe

$$1+2\cos x+2\cos 2x+\ldots$$

zeigt. Wenn wir die Partialsummen von $1+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$ mit $s_k(x)$ bezeichnen, so gilt offenbar

$$(88)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s_k(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_k(x)\,dx = 1 \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

also sind die geometrischen Integrale der Partialsummen beschränkt. Es ist die Frage naheliegend, ob aus dieser schwächeren Voraussetzung schon nicht $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt. In einer Fußnote einer früheren Arbeit[23] habe ich behauptet, daß die Antwort auf diese schwächere Frage verneinend ist, d. h. es existiert eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$ mit den Eigenschaften

$$\int_0^{2\pi} |s_k(x)|\,dx \leqq c_{19} \quad (k=0,1,2,\ldots),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n > 0.$$

Wie ich später bemerkte, ergibt mein Beweis nicht diese Be-

---

[22]) P. ERDŐS, On a conjecture of Steinhaus, *Revista de la Universidad Nacional de Tucuman*, 1 (1940), S. 217–220.

[23]) S. SIDON, Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen, *diese Acta*, 7 (1934), S. 89.

hauptung, sondern nur, daß eine *Umordnung* der Funktionenfolge 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ... existiert so, daß für die „umgeordneten" Partialsummen $s_k^+(x)$ gilt $\int\limits_0^{2\pi} |s_k^+(x)|\, dx < c_{19}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n > 0$. Für das Walsh-System kann ich aber die obige Behauptung ohne Umordnung beweisen.

Satz XIV. *Wenn $\psi_0(x) = 1$, $\psi_1(x), \ldots$ die Funktionen des Walshschen Orthogonalsystems bedeuten, so gibt es eine Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(x)$ *so, daß*

$$\int\limits_0^1 \left| \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_i(x) \right| dx < c_{20}, \quad \overline{\lim}\, a_n > 0.$$

Beweis. Wir betrachten das Produkt (in voller Allgemeinheit benötigen wir es nur später)

(89a) $$P_k(t, x, \varrho) = \prod_{i=1}^{k} (1 + \varrho \psi_{2^i}(t) \psi_{2^i}(x)),$$

wo ϱ eine feste Zahl bedeutet. Nach Multiplikation erhalten wir offenbar

(89b) $$P_k(t, x, \varrho) = 1 + \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} \varrho^j \psi_n(t) \psi_n(x),$$

wo j die Zifferanzahl von n im dyadischen System bedeutet, also

(89c) $$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_j}.$$

Es ist offenbar für $|\varrho| \leq 1$

(89d) $P_k(t, x, \varrho) \geqq 0$, Koeff. $\psi_{2k}(t)$ in $P_k(t, x, \varrho) = \varrho \psi_{2k}(x)$.

Wenn man von $P_k(t, x, \varrho)$ zu $P_{k+1}(t, x, \varrho)$ übergeht, so bleiben die Koeffizienten von $\psi_n(t)\psi_n(x)$, $n \leq 2^{k+1} - 1$ unverändert. Wir bilden formal die Reihe, für welche die $(2^{k+1} - 1)$-te Partialsumme durch

(89e) $$\sum_{\nu=0}^{2^{k+1}-1} a_\nu \psi_\nu(x) \psi_\nu(t) = \prod_{\nu=1}^{k} (1 + \varrho \psi_{2^\nu}(x) \psi_{2^\nu}(t)) \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegeben sind, x beliebig aber fest. Dann ist wegen (89d)

$$a_{2k} = \varrho, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

also wir haben nur die erste Behauptung des Satzes zu beweisen. Es sei $2^k \leq n < 2^{k+1}$ und $s_n(t, x, \varrho)$ die n-te Partialsumme von (89e);

dann ist offenbar

(90a) $s_n(t, x, \varrho) = P_{k-1}(t, x, \varrho) + \varrho s_{n-2^k}(t, x, \varrho)\, \psi_k(x)\, \psi_k(t),$

also wegen $P_{k-1}(t, x, \varrho) \geqq 0$ offenbar

(90b) $$\int_0^1 |s_n(t, x, \varrho)|\, dt \leqq 1 + |\varrho| \int_0^1 |s_{n-2^k}(t, x, \varrho)|\, dt.$$

Aus (90b) folgt nach Iteration, falls $|\varrho| < 1$

(91) $$\int_0^1 |s_n(t, x, \varrho)|\, dt < 1 + |\varrho| + |\varrho|^2 + \ldots = \frac{1}{1-|\varrho|},$$

also ist Satz XIV bewiesen.

Man kann übrigens mit den obigen Polynomen $P_k(t, x, -1)$ auch den folgenden Satz beweisen.

Satz XV. *Wenn $f(x)$ einseitig beschränkt ist und in ihrer Walsh-Entwicklung alle Koeffizienten verschwinden, für welche j (siehe (89c)) gerade ist, dann ist $f(x)$ beiderseits beschränkt.*

Beweis. Es folgt offenbar aus (89b)

$$\int_0^1 P_k(t, x, \varrho)\, \psi_n(t)\, dt = \varrho^j \psi_n(x).$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $f(x) \leqq M$. Dann ist nach der Voraussetzung

$$-\sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} a_n \psi_n(x) = \int_0^1 f(t) P_k(t, x, -1)\, dt \leqq M$$

wegen (89d).

Rademacher[24]) bewies, daß, wenn in der Walsh-Entwicklung einer überall stetigen Funktion nur die Koeffizienten a_{2^k} ($k=0, 1, 2, \ldots$) (also die Glieder mit $j=1$) nicht verschwinden, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2^k}| < \infty$, ähnlich wie bei dem trigonometrischen System. Dies läßt sich nicht für den Fall ausdehnen, wo wir nur wissen, daß alle Koeffizienten mit $j \geqq 3$ verschwinden. Wir beweisen, daß in diesem Falle die Reihe in jedem Intervalle gleichmäßig konvergiert und es gilt sogar der

---

24) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), S. 112—138.

Satz XVI. *Die Walsh-Entwicklung einer überall stetigen Funktion $f(x)$ habe die Eigenschaft, daß es eine Zahl H gebe so, daß alle solche Koeffizienten a_n verschwinden, deren Index wenigstens $(H+1)$-ziffrig im dyadischen System ist, d. h. $j \geqq H+1$ (siehe (89b)). Dann konvergiert die Reihe in jedem Intervalle gleichmäßig.*

Beweis. Wir betrachten mit den vorigen Bezeichnungen (s. Satz XIV) den Ausdruck

$$(92)\quad \alpha_1 s_n(t, x, \varrho_1) + \alpha_2 s_n(t, x, \varrho_2) + \ldots + \alpha_{H+1} s_n(t, x, \varrho_{H+1}) = \Phi(t, x, \varrho),$$

wo $|\varrho_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, H+1$, die ϱ_j sind alle verschieden und über die Zahlen α_ν werden wir später verfügen. $\Phi(t, x, \varrho)$ hat offenbar die Form $\sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \psi_\nu(x) \psi_\nu(t)$; der Koeffizient von $\psi_\nu(x)\psi_\nu(t)$ ist offenbar $\alpha_1 \varrho_1^j + \alpha_2 \varrho_2^j + \ldots + \alpha_{H+1} \varrho_{H+1}^j$, wo j wie im (89c) die Zifferanzahl von ν im dyadischen System bedeutet. Wenn wir also die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{H+1}$ so bestimmen, daß

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{H+1} &= 1 \\ \varrho_1 \alpha_1 + \varrho_2 \alpha_2 + \ldots + \varrho_{H+1} \alpha_{H+1} &= 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varrho_2^H \alpha_1 + \varrho_2^H \alpha_2 + \ldots + \varrho_{H+1}^H \alpha_{H+1} &= 1 \end{aligned}$$

gilt (was wegen $\varrho_i \neq \varrho_k$ möglich ist), dann ist wegen der Lückeneigenschaft von $f(x)$, wenn $u_n(x)$ bzw. $U_n(x)$ die n-te Partialsumme bzw. n-te Cesàro-Mittel erster Ordnung der Walsh-Reihe von $f(x)$ bedeuten,

$$u_n(x) - U_n(x) = \int_0^1 [f(t) - U_n(t)]\, \Phi(t, x, \varrho)\, dt.$$

Es ist wegen (91)

$$|u_n(x) - U_n(x)| < \left(\sum_{\nu=1}^{H+1} \frac{|\alpha_\nu|}{1 - |\varrho_\nu|} \right) \max_{0 \leqq t \leqq +1} |f(t) - U_n(t)|,$$

also ist auf Grund des bekanten Summabilitätssatzes unsere Behauptung bewiesen.

Es gilt auch die folgende Verschärfung des Satzes XVI. Es seien $N_{1j}, N_{2j}, \ldots$ diejenige ganze Zahlen, deren Zifferanzahl im dyadischen Systeme genau j ist. Dann folgt aus den Voraussetzungen des Satzes XVI auch die gleichmäßige Konvergenz im $[0, 1]$ der Teilreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N_{kj}} \psi_{N_{kj}}(x)$$

für $1 \leq j \leq H$; demzufolge ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N_{k1}}| < \infty$.

Mittels den obigen $P_k(t, x, \varrho)$ und $s_n(t, x, \varrho)$ kann man den folgenden Satz beweisen, welcher eine gewisse Ähnlichkeit mit den Sätzen des §. 2. zeigt.

Satz XVII. *Wenn* $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ *das Walsh-System und* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *beliebige Zahlen mit* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 < \infty$ *bedeuten, dann besitzt das System*

$$\int_0^1 f(x)\, \psi_{2k}(x)\, dx = \varepsilon_k$$

eine Lösung $f(x)$, *deren Walsh-Entwicklung überall gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Nach Steinhaus und Kaczmarz[25]) existiert eine überall stetige $g(x)$ mit $g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \psi_\nu(x)$, $b_{2k} = 2\varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Es sei

$$f_k(x) = \int_0^1 g(t) P_k\left(t, x, \frac{1}{2}\right) dt. \tag{93}$$

$f_k(x)$ ist offenbar ein Abschnitt von $f_{k+1}(x)$, also nach (89b) ist für $n \geq k$

$$\int_0^1 f_n(t)\, \psi_{2k}(t)\, dt = \varepsilon_k.$$

Wenn $v_n^{(k)}(x)$ und $V_n^{(k)}(x)$ die n-te Partialsumme bzw. das n-te Cesàro-Mittel erster Ordnung von $f_k(x)$, $W_n(x)$ das n-te Cesàro-Mittel von $g(x)$ bedeuten, dann ist wegen (92) und

$$V_n^{(k)}(x) - V_m^{(k)}(x) = \int_0^1 [W_n(t) - W_m(t)]\, s_n\left(t, x, \frac{1}{2}\right) dt, \quad m > n$$

die Funktion $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ überall stetig. Wegen

---

25) H. Steinhaus–S. Kaczmarz, Le système orthogonal de M. Rademacher, *Studia Math.*, 2 (1930), S. 231–247.

$$v_n^{(k)}(x) - V_n^{(k)}(x) = \int_0^1 [g(t) - W_n(t)]\, s_n\left(t, x, \frac{1}{2}\right) dt$$

ist also die Folge $v_n^{(k)}(x)$ gleichmäßig konvergent, also offenbar auch die Partialsummen von $f(x)$, qu. e. d.

Ein zum Satz XVII analoger Satz habe ich für Potenzreihen in meiner Arbert[23]) ausgesprochen; dies gilt aber nur, wenn wir die Glieder in gewisser Art umordnen. Dem Satz XV entsprechend gilt aber, wie es sich analogerweise beweisen läßt, der

Satz XVIII. *Die Fourierreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *der überall stetigen* $f(x)$ *habe die Eigenschaft, daß es eine ganze Zahl* H *gibt so, daß alle Koeffizienten* a_n, b_n *verschwinden, deren Index im dyadischen System wenigstens* $(H+1)$*-ziffrig ist. Dann konvergiert die Reihe in jedem Intervalle gleichmäßig.*

Für $H = 1$ hat diesen Satz schon KOLMOGOROFF[26]) bewiesen; in diesem Falle gilt auch absolute Konvergenz.

Anhang I.

Herr KACZMARZ[17]) bewies den Satz: *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge der Konstanten* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *die Eigenschaft habe, eine beliebige Funktion der Klasse* L, $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *in eine solche der Klasse* L_p, $p > 1$, $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *zu überführen, ist, daß* $h(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx$ *zur Klasse* L_p *gehöre.*

In den folgenden geben wir für diesen Satz einen, von dem Kaczmarzschen verschiedenen, direkten Beweis.

Bezeichnet $S_n(x)$, $\sigma_n(x)$ das n-te Cesàro-Mittel erster Ordnung der Fourierreihe von $g(x)$ bzw. $h(x)$, so gilt

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_n(x+t) f(t)\, dt,$$

---

[26]) A. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924) S. 96—97.

also nach dem bekanntem Youngschen Satze[27])

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p\,dx \leqq \int_0^{2\pi} |\sigma_n(t)|^p\,dt \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt,$$

woraus die Hinlänglichkeit der Bedingung folgt.

Es sei nun $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine positive konvexe Nullfolge. Es ist leicht einzusehen, daß dann die Folge $-\frac{1}{a_0}, -\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \ldots$ eine konvexe Folge darstellt, welche gegen $-\infty$ strebt. Dann ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$ bekanntlich die Fourierreihe einer Funktion $F(x)$ aus der Klasse L[28]). Wir bestimmen die Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots$ so, daß

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k S_k(x). \tag{94}$$

Da

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n-\nu+1}{n+1} a_\nu \cos \nu x, \quad S_k(x) = \sum_{\mu=0}^{k} \frac{k-\mu+1}{k+1} \alpha_\mu a_\mu \cos \mu x$$

ist, gilt wegen (94)

$$\frac{n-l+1}{n+1} a_l = \frac{1}{l+1} \alpha_l a_l \beta_l + \frac{2}{l+2} \alpha_l a_l \beta_{l+1} + \ldots + \frac{n-l+1}{n+1} a_l \alpha_l \beta_n,$$

$$\tag{95} \left\{ \begin{aligned} \beta_l &= \frac{l+1}{n+1}\left(\frac{n-l+1}{a_l} - \frac{2n-2l}{a_{l+1}} + \frac{n-l+1}{a_{l+2}}\right), \\ &\qquad (l = 0, 1, \ldots, n-2) \\ \beta_{n-1} &= \frac{2n}{n+1}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right), \\ \beta_n &= \frac{1}{a_n}. \end{aligned} \right.$$

Da die Folge $-\frac{1}{a_k}$ konvex ist, folgt aus (95)

$$\sum_{l=0}^{n} |\beta_l| = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}. \tag{96}$$

Aus (94) und (96) folgt, daß

---

27) Siehe z. B. Zygmund, *Trigonometrical Series*, S. 71. Anwendung mit $q = 1$.

28) Satz von Young. Siehe Zygmund, *Trigonometrical Series*, S. 109.

$$I_n = \left(\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqq \frac{2}{a_n} \max_{k \leqq n} \left(\int_0^{2\pi} |S_k(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Wenn die linke Seite unbeschränkt wäre, dann könnte man die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ so wählen, daß auch die Folge $a_n I_n$ unbeschränkt sei. Dann könnte aber diese $g(x)$ wegen $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \left(\int_0^{2\pi} |S_k(x)| \, dx \right)^{1/p} = \infty$ nicht zu L_p gehören, qu. e. d.

Anhang II.

Ich nenne hier eine Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine B-Reihe bezüglich des Intervalls $a < x < b$, wenn ihre Abelschen Summen für $a < x < b$ gleichmäßig beschränkt sind, eine C-Reihe, wenn ihre Abelschen Summen für $a < x < b$ gleichmäßig beschränkt und konvergent sind; eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ mit konstanten Gliedern quasi-vollmonoton, wenn $\Re(\alpha_0), \Re(\alpha_1), \ldots, \Re(\alpha_n), \ldots$ und $\Im(\alpha_0), \Im(\alpha_1), \ldots, \Im(\alpha_n), \ldots$ die Differenz zweier beschränkter vollmonotoner Folgen sind. Es gelten die Sätze:

Satz A. *Dafür, daß eine numerische Faktorenfolge α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ jede B-Reihe bezüglich des Intervalls $a < x < b$ in eine ebensolche überführe, ist notwendig und hinreichend, daß sie quasi-vollmonoton sei.*

Satz B. *Eine jede C-Reihe bezüglich des Intervalls $a < x < b$ in eine ebensolche überführende, numerische Faktorenfolge*[29]) *ist quasi-vollmonoton.*

Beweis des Satzes A. Ist die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ quasi-vollmonoton, so gibt es eine Darstellung $\alpha_n = \int_0^1 t^n dp(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mit $\int_0^1 |dp(t)| < \infty$[30]). Gilt für die numerische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ die Ungleichung $\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n r^n \right| < M$, $M > 0$ uud fest, für

---

[29]) Die Existenz solcher nichttrivialer Folgen folgt aus Hilfssatz II dieses Anhanges.

[30]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, *Math. Zeitschrift*, 9 (1921), S. 74–109.

$0 < r < 1$, so ist

$$\underset{0<r<1}{\mathrm{Max}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n r^n \right| = \underset{0<r<1}{\mathrm{Max}} \left| \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n (rt)^n \, dp(t) \right| < M \int_0^1 |dp(t)|.$$

Überführt die Faktorenfolge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ jede B-Reihe in eine B-Reihe, so gilt für ein beliebiges Polynom $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$

$$(1) \qquad \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha_n \right| < C \underset{0<z<1}{\mathrm{Max}} |P(z)|$$

mit nur von den α abhängigem C.[31] Nach einem wohlbekannten Satze des Herrn F. Riesz[32]) folgt daraus die Erfüllbarkeit des Gleichungssystems

$$\int dp(t) = \alpha_0, \int t \, dp(t) = \alpha_1, \ldots, \int t^n dp(t) = \alpha_n, \ldots$$

durch eine Funktion $p(t)$ mit $\int_0^1 |dp(t)| < \infty$ d. h. die Quasi-Vollmonotonität der Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots$

Beim Beweise des Satzes B stütze ich mich auf folgende Hilfssätze:

Hilfssatz I. *Ist die numerische Folge* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *nicht quasi-vollmonoton, so gibt es eine B-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *bezüglich des Intervalls* $a < x < b$, *für welche* $\overline{\lim} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n(x) (r_2^n - r_1^n) \right| = \infty$ *für* $a < x < b$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\lim r_1 = \lim r_2 = 1$ *gilt.*

---

[31]) Wäre (1) nicht erfüllt, so gäbe es eine Folge, von Polynomen $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_k(z) = \sum_{n=0}^{N_k} a_{nk} z^n, \ldots$ mit $\underset{0<z<1}{\mathrm{Max}} |P_k(z)| < 1$ und

$$\lim_{k=\infty} \left| \sum_{n=0}^{N_k} a_{nk} \alpha_k \right| = \infty.$$

Für die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, wo $f_n(x_k) = a_{nk}$ für $x = x_k$, $f_n(x) = 0$ für $x \neq x_k$, $a < x_k < b$, $a_{nk} = 0$ für $n > N_k$ gilt also

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right| < 1, \ \overline{\lim} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n(x) r^n \right| = \infty$$

für $a < x < b$, $0 < r < 1$.

[32]) F. Riesz, Sur certains systémes singuliers d'équations integrales, *Annales de l'École Normale Supérieure*, 28 (1911), S. 33–62.

B e w e i s. Aus $\overline{\lim}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n(x)(r_2^n - r_1^n)\right| < \infty$ für $a < x < b$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\lim r_1 = 1$ für jede B-Reihe bezüglich eines Intervalls $a < x < b$ folgt für ein beliebiges Polynom $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$

$$(2) \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \alpha_n (1 - r^n)\right| < C \operatorname*{Max}_{0<z<1} |P(z)|$$

für jedes die Bedingung $0 < r_1 < r < 1$, r_1 fest, erfüllende r mit nur von den α abhängigem C.[38]) Die Folge $\alpha_0, \alpha_1(1 - r_1), \ldots, \alpha_n(1 - r_1^n), \ldots$ und daher auch $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ist also quasi-vollmonoton.

H i l f s s a t z II. *Eine numerische Faktorenfolge*

$$\beta_0, \beta_1 = \int_0^1 t\, dp(t), \ldots, \beta_n = \int_0^1 t^n\, dp(t), \ldots$$

mit totalsetiger Belegungsfunktion überführt jede B-Reihe bezüglich $a < x < b$ in eine C-Reihe bezüglich $a < x < b$.

B e w e i s. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ eine numerische Reihe mit $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n\right| < M$, $M > 0$ und fest für $0 < r < 1$, so gilt für $0 < r_1 < r_2 < 1$, wenn $\varepsilon > 0$, sonst beliebig, das Polynom $P(z) = \sum_{m=0}^{M} a_m z^m$ die Ungleichung $\int_0^1 |d[p(t) - P(t)]| < \frac{\varepsilon}{4M}$ erfüllt, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = g(z)$ für $0 < z < 1$, $\int_0^1 t^n P(t)\, dt = \beta_n'$ gesetzt wird,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\beta_n - \beta_n')(r_2^n - r_1^n)\right| = \left|\int_0^1 [g(tr_1) - g(tr_2)]\, d[p(t) - P(t)]'\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n \beta_n' (r_2^n - r_1^n)\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=1}^{M} m a_m \left[\frac{1}{r_1^m} \int_{r_1}^{r_2} r^{m-1} g(r)\, dr + \left(\frac{1}{r_1^m} - \frac{1}{r_2^m}\right) \int_0^{r_2} r^{m-1} g(r)\, dr\right]\right| <$$

$$< (r_2 - r_1)\, Q$$

[38]) (2) ergibt sich analog wie (1).

mit nur von M und den a abhängigem Q. Es ist also für $r_2 - r_1 < \frac{1}{2Q}$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u_n (r_2^n - r_1^n) \right| < \varepsilon.$$

Hilfssatz III. *Jede Funktionenreihe*[34]) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *mit* $\overline{\lim} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(r_2^n - r_1^n) \right| = \infty$ *für* $a < x < b$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\lim r_1 = 1$ *kann durch eine Faktorenfolge* $\beta_0, \beta_1 = \int_0^1 t\,dp(t), \ldots, \beta_n = \int_0^1 t^n\,dp(t), \ldots$ *mit totalstetiger Belegungsfunktion in eine Reihe von ebensolcher Eigenschaft überführt werden.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß es Folgen $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$; $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1k}, \ldots$; $r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{2k}, \ldots$ mit $a < x_k < b$, $0 < r_{1k} < r_{2k} < 1$, $\lim r_{1k} = 1$ und $\lim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_k)(r_{2k}^n - r_{1k}^n) = \infty$ gibt. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_k)\left[(t r_{2k})^n - (t r_{1k})^n\right] > \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_k)(r_{2k}^n - r_{2k}^n)$ für $t_k < t < 1$, $p_k(t) = 0$ für $0 < t < t_k$, $p_k(t) = \frac{t - t_k}{1 - t_k}$ für $t_k < t < 1$, so läßt sich nach dem aus der Theorie der singulären Integrale wohlbekannten Lebesgueschen Verfahren die Funktion $p(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l p_{k_l}(t)$ mit konstanten γ und $\sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_l| < \infty$ so konstruieren, daß die zugehörige Folge

$$\beta_0, \beta_1 = \int_0^1 t\,dp(t), \ldots, \beta_n = \int_0^1 t^n\,dp(t), \ldots$$

von der gewünschten Beschaffenheit sei.

Beweis des Satzes B. Ist die numerische Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ nicht quasi-vollmonoton, so gibt es eine B-Reihe bezüglich des Intervalls $a < x < b$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, mit

$$\overline{\lim} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n(x)(r_2^n - r_1^n) \right| = \infty$$

---

[34]) Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^n$ für $|z| < 1$ konvergieren.

für $a < x < b$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\lim r_1 = \lim r_2 = 1$. Ist

$$\beta_0, \beta_1 = \int_0^1 t\, dp(t), \ldots, \beta_n = \int_0^1 t^n\, dp(t), \ldots$$

die nach Hilfssatz III existierende Folge mit totalstetiger Belegungsfunktion, für welche $\overline{\lim} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n f_n(x)\,(r_2^n - r_1^n) \right| = \infty$ für $a < x < b$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\lim r_1 = \lim r_2 = 1$, so wird die C-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f_n(x)$ bezüglich des Intervalls $a < x < b$ durch $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ in keine ebensolche übergeführt.

(Eingegangen von 5. Juni 1937 bis 13. Juni 1940;
umgearbeitet eingegangen am 31. Dezember 1941.)